# Devoir Surveillé
# Vecteurs et droites

**Exercice 1** : **(2 points)**

Dans un repère du plan, on donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -3 \\ x+1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. (PQ)//(MN) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, ce qui revient à dire

$$-3\times 3-(x+1)(x-5)=0 \iff -9-(x^2-4x-5)=0 \iff -9-x^2+4x+5=0 \iff 0=x^2-4x+4$$

2. On reconnaît l'identité remarquable $x^2-4x+4=(x-2)^2$ donc $(Mn)//(PQ)$ si et seulement si $x=2$.

   Ce qui revient à dire que $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Exercice 2** : **(10 points)**

1. On sait que (CD)//(AB) mais CD ≠ AB. En tenant compte de l'ordre des points, on peut donc dire que le quadrilatère ABDC est un simple trapèze.

2. On note $D(x;y)$ On sait que $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x+5 \\ y \end{pmatrix}$.

   Ainsi on a $\begin{cases} x+5=2\times 4 \\ y=2\times(-2) \end{cases} \iff x=3 \text{ et } y=-4$ Donc $D(3;-4)$

3. **a.** $B(2;2)$ et $6\times 2+2=14$ donc $B\in(d)$. $D(3;-4)$ et $6\times 3+(-4)=14$ donc $D\in(d)$

   **b.** Un point $M(x;y)$ appartient à (AC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x+2;y-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;-4)$ sont colinéaires, ce qui revient à dire

$$(x+2)\times(-4)-(-3)(y-4)=0 \iff -4x-8+3y-12=0 \iff -4x+3y=20$$

   **c.** Un vecteur directeur de (BD) = $(d)$ est $\vec{u}(-1;6)$ tandis qu'un vecteur directeur de (AC) est $\vec{v}(-3;-4)$.
   Grâce aux signes, on sait que ces vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

   **d.** On cherche la solution du système :

$$\begin{cases} 6x+y=14 \\ -4x+3y=20 \end{cases} \iff \begin{cases} y=14-6x \\ -4x+3(14-6x)=20 \end{cases} \iff \begin{cases} y=14-6x \\ -4x-18x=20-42 \end{cases} \iff \begin{cases} y=8 \\ x=1 \end{cases}$$

   Donc $E(1;8)$

4. **a.** $K(0;3)$ et $L(-1;-2)$

   **b.** $\overrightarrow{KE}(1;5)$ et $\overrightarrow{LK}(1;5)$ donc les vecteurs sont colinéaires : les points E, K et L sont alignés.

**Exercice 3** : **(8 points)**

1. **a.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} &\iff \overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\\ &\iff 3\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &\iff 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ &\iff 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\\ &\iff 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}\\ &\iff 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}\end{aligned}$$

**b.** Les points A, G et A$'$ sont alignés.

**c.** Pour la construction, il suffit de tracer (AA$'$) et (BB$'$). G étant sur les deux droites, il s'agit de leur point d'intersection.

**d.** Ces droites sont les médianes du triangle ABC. On vient de démontrer qu'elles étaient concourantes en le point G, au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.

2. **a.** On reporte les vecteurs « bout à bout ».

**b.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &\iff \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}\\ &\iff \overrightarrow{0}=-\overrightarrow{AH}+2\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{0}\\ &\iff \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}\end{aligned}$$

**c.** Donc (AH)//(OA$'$) qui est perpendiculaire à (BC) , d'où (AH) $\perp$ (BC)

**d.** (BH) $\perp$ (AC) et (CH) $\perp$ (AB)

**e.** Il s'agit des hauteurs du triangle ABC. On vient de démontrer qu'elles étaient concourantes (en H).

3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} &\iff \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\\ &\iff \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\\ &\iff \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

4. Les points O, H et G sont alignés.