∾ DEVOIR SURVEILLÉ ∾
CORRECTION

Exercice 1 : **4 points**

1. $|4x-2|=3 \iff 4x-2=3 \quad \text{ou} \quad 4x-2=-3 \iff \dots \iff x=\dfrac{5}{4} \quad \text{ou} \quad x=-\dfrac{1}{4}$
2. $|x+5|=|3-2x| \iff x+5=3-2x \quad \text{ou} \quad x+5=-(3-2x) \iff \dots \iff x=-\dfrac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x=8$
3. $|4-2x|>3 \iff 4x-2>3 \quad \text{ou} \quad 4x-2<-3 \iff \dots \iff x>\dfrac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x<\dfrac{1}{2}$
4. $\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|\leq 1 \iff -1\leq \sin(x)-\dfrac{1}{2}\leq 1 \iff \dots \iff -\dfrac{1}{2}<\sin(x)<\dfrac{3}{2}$

   Un cercle trigonométrique donne alors $x\in\left]-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right[\cup\left]-\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$

Exercice 2 : On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par $f(x)=|3x+1|-|1-x|+3$. **6 points**

1. Si $3x+1\geq 0$ alors $|3x+1|=3x+1$
   Sinon $|3x+1|=-(3x+1)$

   Ainsi : $|3x+1|=\begin{cases} 3x+1 & \text{Si } x\geq -\dfrac{1}{3} \\ -3x-1 & \text{Sinon} \end{cases}$

   Si $1-x\geq 0$ alors $|1-x|=1-x$
   Sinon $|1-x|=-(1-x)$

   Ainsi : $|1-x|=\begin{cases} 1-x & \text{Si } x\leq 1 \\ x-1 & \text{Sinon} \end{cases}$

2. $f(x)=|3x+1|-|1-x|+3$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Expression de $\lvert 3x+1\rvert$		$-3x-1$	0	$3x+1$		$3x+1$	
Expression de $\lvert 1-x\rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
Expression de $f(x)$		$-2x+1$		$4x+3$		$2x+5$	

   Finalement si $x<-\dfrac{1}{3}$ on a $f(x)=-3x-1-(x-1)+3=-4x+3$
   Si $-\dfrac{1}{3}\leq x<1$ on a $f(x)=3x+1-(x-1)+3=2x+2$
   Si $x\geq 1$ on a $f(x)=3x+1-(1-x)+3=4x+3$

3. On en déduit

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Variations de f		↘	$\frac{5}{3}$		↗		

4. Représenter f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique = 1 cm).
5. Si $x < -\frac{1}{3}$ alors $f(x) = 10 \iff -2x+1 = 10 \iff \ldots \iff x = -\frac{9}{2} < -\frac{1}{3}$ donc $-\frac{9}{2}$ est un antécédent de 10 sur $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[$
   Si $-\frac{1}{3} \leq x < 1$ alors $f(x) = 10 \iff 4x+3 = 10 \iff \ldots \iff x = \frac{7}{4} \notin \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$ donc il n'y a pas d'antécédent pour 10 sur $\left]-\frac{1}{3}; 1\right[$
   Si $x \geq 1$ alors $f(x) = 10 \iff 2x+5 = 10 \iff \ldots \iff x = \frac{5}{2} > 1$ donc $\frac{5}{2}$ est un antécédent de 10 sur $]1; +\infty[$
   Au final, 10 possède deux antécédents par f.

Exercice 3 : On donne le tableau de variations d'une fonction u : **2 points**

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
Variations de u		$\nearrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	0	$\searrow$	
Variations de $\lvert u\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	0	$\nearrow$	
Variations de $\sqrt{u}$			0	$\nearrow$	7	$\searrow$	0		

Exercice 4 : **5 points**

Déterminer les tableaux de variations de chacune des fonctions suivantes, sur le plus grand ensemble possible, par la méthode des tableaux de variations successifs :

$$f(x) = 4 - 2|x| \qquad g(x) = \frac{1}{|4-2x|} \qquad h(x) = 5 - \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $\lvert x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Variations de $-2\lvert x\rvert$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
Variations de $4-2\lvert x\rvert$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de $4-2x$		$\searrow$	0	$\searrow$	
Variations de $\lvert 4-2x\rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Variations de $\dfrac{1}{\lvert 4-2x\rvert}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		2		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de x^2		$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	
Variations de $-2x^2$		$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	
Variations de $4-2x^2$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	
Variations de $\sqrt{4-2x^2}$	$\Vert$	//////	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	//////	
Variations de $\dfrac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\Vert$	//////		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$		//////	
Variations de $-\dfrac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\Vert$	//////		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		//////	
Variations de $5-\dfrac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$	$\Vert$	//////		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$		//////	

Exercice 5 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **3 points**

1. On cherche x tel que $4-2x \geq 0 \iff \dots \iff x \leq 2$.
   Donc $D_f =]-\infty;2]$
2. Soient x et y appartenant à D_f tels que $x < y \leq 2$.
   Alors $-2x > -2y \geq -4 \iff 4-2x > 4-2y \geq 0 \iff \sqrt{4-2x} > \sqrt{4-2y} \geq 0 \iff f(x) > f(y) \geq 2$
   L'ordre des images et des antécédents est inversé : La fonction f est strictement décroissante sur D_f.