

CORRECTION DM 8 BIS

PROBABILITÉS

PARTIE A :

Temps d'attente de la première bonne réponse

1. X peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à 11.

2. $P(X = 11) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ car c'est la probabilité que Fabrice ne réponde juste à aucune question.

En utilisant un arbre, on trouve facilement : $P(X = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{3^{10-k}}{4^{10}}$ pour $1 \leq k \leq 10$

3. Il ne s'agit pas d'une loi binomiale car X ne compte pas des succès dans un schéma de Bernoulli.

PARTIE B :

Attribution d'une note sur 10

1. Sans pénalité

a. Fabrice répète 10 fois l'épreuve « répondre à une question », de manière identique et indépendante. Chaque épreuve est :

↪ soit un succès («la réponse est juste») de probabilité $\frac{1}{4}$

↪ soit un échec, de probabilité $\frac{3}{4}$

Y compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, donc Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

b.

k	0	1	2	3	4	5
$P(Y = k)$	0,056314	0,187711	0,281568	0,250282	0,145998	0,058399

k	6	7	8	9	10
$P(Y = k)$	0,016222	0,003090	0,000386	0,000029	0,000001

c. La probabilité que Fabrice obtienne 10 est d'environ 10^{-6} .

d. La probabilité que Fabrice obtienne au moins la moyenne est $P(X \geq 5) \approx 0,078$

e. La note la plus probable pour Fabrice est 2

f. fabrice peut espérer la note de $E(Y) = 10 \times 0,25 = 2,5$

2. Avec pénalité

a. On a $Z = 1 \times Y - 0,2 \times (10 - Y) = Y - 2 + 0,2Y = 1,2Y - 2$

b. $P(Z < 0) = P(1,2Y - 2 < 0) = P(1,2Y < 2) = P\left(Y < \frac{2}{1,2}\right) = P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) \approx 0,244$

$P(Z \geq 50) = P(1,2Y - 2 \geq 5) = P(1,2Y \geq 7) = P\left(Y \geq \frac{7}{1,2}\right) = P(Y \geq 6) \approx 0,0197$

c. $E(Z) = E(1,2Y - 2) = 1,2E(Y) - 2 = 1$. L'objectif est donc raisonnablement atteint.

PARTIE C :

Répétitions de QCMs

1. On appelle Z la variable aléatoire qui compte le nombre de candidats qui obtiennent 10.

On répète n fois l'épreuve « répondre à un QCM », de manière identique et indépendante.

Chaque épreuve est :

↪ soit un succès («la note est 10») de probabilité 10^{-6}

↪ soit un échec, de probabilité 0,999999

Z compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, donc Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,000001$.

Ainsi $P_n = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - 0,999999^n$

2. A la calculatrice on trouve qu'à partir de $n = 4605168$ on a $P_n \geq 0,99$