Exercice 1 : Dans un repère du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(3;4)$, $B(1;-1)$ et $C(6;-2)$.

1. Un vecteur directeur de (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2;-5)$. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} \text{Un point } M(x;y) \text{ appartient à la droite (AB)} & \text{si et seulement si} & \overrightarrow{AM}(x-3;y-4) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-2;-5) \text{ sont colinéaires} \\ & \text{si et seulement} & (x-3)\times(-5)-(-2)\times(y-4)=0 \\ & \text{si et seulement} & -5x+15+2y-8=0 \\ & \text{si et seulement} & -5x+2y=-7 \end{array}$$

   Donc une équation de la droite (AB) est $-5x+2y=-7$

2. Les coordonnées du point I sont $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2};\dfrac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(\dfrac{9}{2};1\right)$.

   Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{AB}$ car $d//(AB)$. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} \text{Un point } M(x;y) \text{ appartient à la droite } d & \text{si et seulement si} & \overrightarrow{IM}(x-4,5;y-1) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-2;-5) \text{ sont colinéaires} \\ & \text{si et seulement} & (x-4,5)\times(-5)-(-2)\times(y-1)=0 \\ & \text{si et seulement} & -5x+22,5+2y-2=0 \\ & \text{si et seulement} & -5x+2y=-20,5 \end{array}$$

   Donc une équation de la droite d est $-5x+2y=-20,5$

3. Δ est la droite d'équation $-16x+y=-98$

   a. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}(-1;-16)$. Or $-1\times(-5)-(-2)\times(-16)\neq 0$.
   Donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires : les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles.
   Les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection vérifient alors les équations des deux droites, donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lll} -16x+y & = & -98 \\ -5x+2y & = & -7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} y & = & -98+16x \\ -5x+2(-98+16x) & = & -7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} y & = & -98+16x \\ 27x+-196 & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} y & = & -98+16x \\ x & = & \dfrac{-7+196}{27}=7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x & = & 7 \\ y & = & -98+16\times 7=14 \end{array}\right.$$

   Donc le point d'intersection D des droites Δ et (AB) a pour coordonnées $(7;14)$.

   b. Les coordonnées de J sont $\left(\dfrac{6+7}{2};\dfrac{-2+14}{2}\right)=\left(\dfrac{13}{2};6\right)$.

   Méthode 1 : Vérifions que les coordonnées de J vérifient l'équation de d
   $-5\dfrac{13}{2}+2\times 6=-32,5+12=-20,5.$ Donc $J\in d$

   Méthode 2 : Montrons que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire à un vecteur directeur de d.
   $\overrightarrow{IJ}(2;5)$ et un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{AB}(-2;-5)$.
   Donc $\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}$ et $(IJ)//d$.
   Or I appartient à d, donc (IJ) et d sont confondues, autrement dit $J\in d$

   Méthode 3 : Montrons qu'une équation de la droite (IJ) est équivalente à une équation de d. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} \text{Un point } M(x;y) \text{ appartient à la droite (IJ)} & \text{si et seulement si} & \overrightarrow{IM}(x-4,5;y-1) \text{ et } \overrightarrow{IJ}(2;5) \text{ sont colinéaires} \\ & \text{si et seulement} & (x-4,5)\times 5-2\times(y-1)=0 \\ & \text{si et seulement} & 5x-22,5-2y+2=0 \\ & \text{si et seulement} & 5x-2y=20,5 \\ & \text{si et seulement} & -5x+2y=-20,5 \end{array}$$

   Donc une équation de la droite (IJ) est aussi $-5x+2y=-20,5 \Longrightarrow$ (IJ) et d sont confondues $\Longrightarrow$ Donc $J\in d$.

Exercice 2 : Soit ABCD un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD), M le point d'intersection des droites (AD) et (BC), I le milieu du côté [AB], J celui du côté [CD], et K le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].

1. $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère car il possède une origine et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirigeant deux côtés consécutifs du trapèze ABCD, ils ne sont pas colinéaires, donc ils constituent une base du plan.
2. A est l'origine donc $A(0;0)$ $\quad \overrightarrow{AB}=1\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}$ donc $B(1;0)$ $\quad \overrightarrow{AD}=0\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}$ donc $D(0;1)$
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+0\overrightarrow{AD}$ donc $I\left(\frac{1}{2};0\right)$
3. On a $\overrightarrow{AC}=a\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}$ donc $C(a;1)$ On a $J\left(\frac{a+0}{2};\frac{2}{2}\right)$ donc $J\left(\frac{a}{2};1\right)$.
4. Donc :
Un point $E(x;y)$ appartient à la droite (BC) si et seulement si $\overrightarrow{BE}(x-1;y-0)$ et $\overrightarrow{BC}(a-1;1-0)$ sont colinéaires
si et seulement $(x-1)\times 1-(a-1)\times y=0$
si et seulement $x-1+(-a+1)y=0$
si et seulement $x+(1-a)y=1$
Ainsi une équation cartésienne de (BC) est $x+(1-a)y=1$.
De plus, il est clair qu'une équation de (AD) est $x=0$ (c'est l'axe des ordonnées, mais vous pouvez retrouver cette équation par le calcul si ce n'est pas encore clair pour vous).
Comme $M(x;y)\in(BC)\cap(AD)$, ses coordonnées vérifient le système :
$$\begin{cases} x+(1-a)y = 1 \\ x = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ (1-a)y = 1\end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{1-a}\end{cases} \text{ Car } a\neq 1 \qquad \text{Ainsi } M\left(0;\frac{1}{1-a}\right)$$
Noter que si $a=1$ le système n'a pas de solution, et géométriquement, cela signifie que le trapèze est en fait un parallélogramme, donc M *n'existe pas, d'où le fait de ne pas trouver de solution ...*
5. On a $J\left(\frac{a}{2};1\right)$. Ainsi $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{a-1}{2};1\right)$ De plus $\overrightarrow{IM}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{1-a}\right)$. Or $\frac{a-1}{2}\times\frac{1}{1-a}-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires
Donc les droites (IJ) et (IM) sont parallèles avec un point commun : elles sont confondues
Donc les points I, J et M sont alignés.
6. Ainsi :
Un point $E(x;y)$ appartient à la droite (BD) si et seulement si $\overrightarrow{BE}(x-1;y-0)$ et $\overrightarrow{BD}(0-1;1-0)$ sont colinéaires
si et seulement $(x-1)\times 1-(-1)\times y=0$
si et seulement $x-1+y=0$
si et seulement $x+y=1$
Ainsi une équation cartésienne de (BD) est $x+y=1$. De même :
Un point $E(x;y)$ appartient à la droite (AC) si et seulement si $\overrightarrow{AE}(x-0;y-0)$ et $\overrightarrow{AC}(a-0;1-0)$ sont colinéaires
si et seulement $x\times 1-a\times y=0$
si et seulement $x-ay=0$
Ainsi une équation cartésienne de (AC) est $x-ay=0$.
Les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection K vérifient donc le système :
$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x-ay = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 1 \\ x = ay\end{cases} \iff \begin{cases} ay+y = 1 \\ x = ay\end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{1}{a+1} \\ x = \dfrac{a}{a+1}\end{cases} \qquad \text{Donc } K\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$$
7. Ainsi $\overrightarrow{IK}\left(\frac{a-1}{2(a+1)};\frac{1}{a+1}\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{a-1}{2};1\right)$ Or $\frac{a-1}{2(a+1)}\times 1-\frac{a-1}{2}\times\frac{1}{a+1}=\frac{a-1}{2(a+1)}-\frac{a-1}{2(a+1)}=0$
Ainsi I , J et K sont alignés. Finalement, I, J, K et M sont alignés.