

## ~ DEVOIR MAISON 5 ~ VARIATIONS DE FONCTION

10 DMs seront relevés au hasard parmi les 33.

Les cinq questions de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

On considère la fonction  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

### 1. Ensemble de définition

- Etablir le tableau de signe de l'expression  $(1-x)(1+x)$ .
- Justifier que la fonction  $f$  est définie sur  $[-1; 1]$ .

### 2. Etude des variations de la fonction $f$

Déterminer les variations de la fonction  $f$  sur  $[-1; 1]$ .

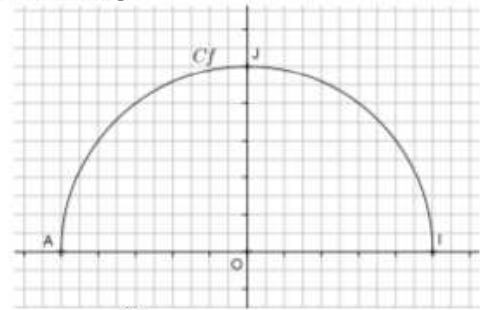
On pourra présenter cette étude sous forme de tableaux de variation successifs.

### 3. Représentation graphique de la fonction $f$

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O; I, J)$  ci-contre.

- On considère un point  $M$  d'abscisse  $x$  sur la courbe  $C_f$ .  
Préciser les coordonnées du point  $M$  en fonction de  $x$ .  
En déduire que  $OM = 1$ .

On vient ainsi de démontrer que la courbe  $C_f$ , tracée ci-contre, est en fait un demi-cercle de centre  $O$  et de rayon 1.



- Construire précisément, sur le graphique ci-dessus, le point  $T$  d'abscisse  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . On justifiera brièvement la construction sur la copie.

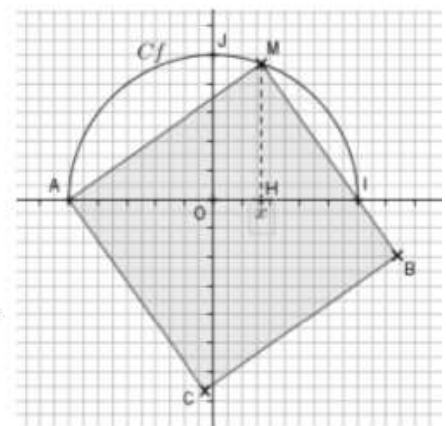
### 4. Etude expérimentale de l'aire du carré $AMBC$ selon les valeurs de $x$

On considère le point  $A$  de coordonnées  $(-1; 0)$  et un point  $M$  quelconque sur la courbe  $C_f$ , d'abscisse  $x$ . A partir des points  $A$  et  $M$ , on construit dans le sens indirect le carré  $AMBC$ .

On réalise comme ci-contre une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

En déplaçant le point  $M$ , on obtient le tableau de valeurs ci-dessous donnant l'aire du carré  $AMBC$  pour des abscisses  $x$  du point  $M$ .

Abscisse $x$ du point $M$	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Aire du carré $AMBC$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4



Conjecturer l'expression de l'aire  $A(x)$  du carré  $AMBC$  en fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$ .

Dans cette question, toute trace de recherche basée sur le relevé de valeurs ci-dessus, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

### 5. Détermination algébrique du réel $x$ pour que l'aire du carré soit égale à l'aire du demi-disque.

On appelle  $H$  le point de l'axe des abscisses de même abscisse  $x$  que le point  $M$ .

- Exprimer les longueurs  $AH$  et  $HM$  en fonction de  $x$ .
- Justifier que  $AM = \sqrt{2+2x}$ .
- En déduire l'expression de l'aire  $A(x)$  du carré  $AMBC$  en fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$ .
- L'aire du carré  $AMBC$  peut-elle être égale à l'aire du demi-disque de diamètre  $[AI]$ ? Si oui, déterminer l'abscisse  $x$  du point  $M$  correspondant.