∾ Devoir Maison 4 ∾
La méthode de Héron

Méthode de Héron :

⇝ Etape 0 : Choisir un rectangle de largeur l et de longueur L telle que son aire soit égale à 2.

⇝ Etape 1 : Changer la Longueur L précédente en $\dfrac{L+l}{2}$

⇝ Etape 2 : Changer la valeur de la largeur l de manière à toujours avoir un rectangle d'aire égale à 2

⇝ Etape 3 : Recommencer les étapes 1 et 2 autant que vous le désirez.

PARTIE A : **Application de la méthode**

1. ⇝ Etape 0 : $l = 1$ et $L = 2$. On a bien $l \times L = 2$.

⇝ Etape 1 : $L := \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$

⇝ Etape 2 : On cherche l telle que $l \times L = 2$ ie telle que :

$$l \times \frac{3}{2} = 2 \iff l = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2 \times \frac{2}{3} \iff l = \frac{4}{3}$$

⇝ Etape 3 :

— Etape 1 : $L := \dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{\frac{17}{6}}{2} = \dfrac{17}{12}$

— Etape 2 : On cherche l telle que $l \times L = 2$ ie telle que :

$$l \times \frac{17}{12} = 2 \iff l = \frac{2}{\frac{17}{12}} = 2 \times \frac{12}{17} \iff l = \frac{24}{17}$$

⇝ Etape 3 :

— Etape 1 : $L := \dfrac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \dfrac{\frac{577}{204}}{2} = \dfrac{577}{408}$

— Etape 2 : On cherche l telle que $l \times L = 2$ ie telle que :

$$l \times \frac{577}{408} = 2 \iff l = \frac{2}{\frac{577}{408}} = 2 \times \frac{408}{577} \iff l = \frac{816}{577}$$

⇝ Etape 3 :

— Etape 1 : $L := \dfrac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \dfrac{\frac{665857}{235416}}{2} = \dfrac{665857}{470832}$

— Etape 2 : On cherche l telle que $l \times L = 2$ ie telle que :

$$l \times \frac{665857}{470832} = 2 \iff l = \frac{2}{\frac{665857}{470832}} = 2 \times \frac{470832}{665857} \iff l = \frac{941664}{665857}$$

2. On obtient $l \simeq 1,414213562375$ et $L \simeq 1,414213562372$ (avec 12 décimales).
Or $\sqrt{2} \simeq 1,414213562373$.
A priori, sur vos calculatrices, vous ne trouviez que des valeurs approchées égales, car vous ne pouvez pas afficher plus de 10 décimales. Cependant, vous constatez que les valeurs exactes ne sont pas égales pour autant !!

3. Cet algorithme est donc très efficace !! En 3 étapes, il donne déjà 11 décimales correctes pour $\sqrt{2}$.
(A l'étape précédent, on avait déjà les 5 premières décimales juste pour l et L)

PARTIE B : **Le lien avec les suites**

La longueur et la largeur du rectangle auquel on applique la méthode change au fur et à mesure des étapes. Notons L_0 et l_0 leurs valeurs initiales et L_n et l_n leurs $n^{\text{ième}}$ valeurs.

1. $L_1 = \dfrac{3}{2}$; $l_1 = \dfrac{4}{3}$ et $L_2 = \dfrac{17}{12}$; $l_2 = \dfrac{24}{17}$

2. $L_n : \begin{cases} L_0 = 2 \\ L_{n+1} = \dfrac{L_n + l_n}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$ et $l_n = \dfrac{2}{L_n} \quad \forall n \geq 0$

3. Ainsi en remplaçant l_n par son expression dans L_{n+1} on trouve bien :

$$L_{n+1} = \frac{L_n + l_n}{2} = \frac{L_n + \dfrac{2}{L_n}}{2}$$

4. D'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \sqrt{2}$

PARTIE C : **Avec un algorithme**

1. $u_n : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \dfrac{2}{u_n}}{2} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

2. Il calcule les valeurs des termes u_i pour i allant de 1 jusqu'à n (n choisi par l'utilisateur) et affiche la valeur du dernier terme calculé.

3. Pour A = 2 :

a. $u_0 = 1 \qquad u_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = \dfrac{3}{2}$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2 \times \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} \simeq 1.4167.$$

b. La suite (u_n) semble calculer les termes de la suite (L_n) de la partie B à partir de $n \geq 1$, ie une valeur approchée de $\sqrt{2} \simeq 1.4142$

4. Si A = 3 :

$u_0 = 1 \qquad u_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{3}{1}\right) = 2 \qquad u_2 = \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{4} \simeq 1.75$

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + 3 \times \frac{4}{7}\right) = \frac{97}{56} \simeq 1.73214$$

Or $\sqrt{3} \simeq 1.73205$.

L'algorithme semble donc calculer des valeurs approchées de $\sqrt{3}$ par la méthode de Héron.

5. Varie suivant les modèle de calculatrices.

6. $\sqrt{97} \simeq 9,8488578$.

Il faut rentrer A = 97 pour calculer des valeurs approchées de $\sqrt{97}$ puis on teste avec diverses valeurs de n.

- $n = 3$ on trouve $u_3 \simeq 14$
- $u = 5$ on trouve $u_5 \simeq 9.87$
- $u = 6$ on trouve $u_6 \simeq 9.8489$
- $n = 7$ on trouve $u_7 \simeq 9.848857802$ ce qui est un valeur approchée de $\sqrt{97}$ à au moins 9 décimales près !