∾ DEVOIR MAISON 4 ∾
LA MÉTHODE DE HÉRON

Désormais j'aimerai que les DM soient rédigés individuellement.
Je relèverai 10 d'entre eux parmi les 33, choisis au hasard par un programme informatique devant vous.
Ceux qui n'auraient pas été choisis peuvent tout de même me le rendre.
Un devoir maison recopié, ou fait par un enseignant particulier, ne procurera désormais aucun bonus sur la moyenne.

Les grecs savent depuis longtemps construire à la règle et au compas un segment de longueur n'importe quelle racine carré grâce au théorème de Pythagore, sans pour autant connaître précisément cette longueur.
La méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée (qui donne une valeur approchée de la racine). Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie (I$^{\text{er}}$ siècle après JC) mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne. Nous allons la découvrir sur $\sqrt{2}$.

L'idée est de partir d'un rectangle d'aire 2, puis de modifier ses côtés successivement et intelligemment afin de conserver son aire, mais de se rapprocher d'un carré, qui aura donc pour côté $\sqrt{2}$.

Méthode de Héron :

- ⇝ Etape 0 : Choisir un rectangle de largeur l et de longueur L telle que son aire soit égale à 2.
- ⇝ Etape 1 : Changer la Longueur L précédente en $\dfrac{\mathrm{L}+l}{2}$
- ⇝ Etape 2 : Changer la valeur de la largeur l de manière à toujours avoir un rectangle d'aire égale à 2
- ⇝ Etape 3 : Recommencer les étapes 1 et 2 autant que vous le désirez.

PARTIE A : **Application de la méthode**

1. Appliquer cet algorithme à un rectangle de largeur 1 et de Longueur 2, en répétant l'étape 3 trois fois (**en valeur exacte**).
2. Quelles valeurs approchées de L et l cela donne-t-il ?
3. Cet algorithme est-il efficace ?

PARTIE B : **Le lien avec les suites**

La longueur et la largeur du rectangle auquel on applique la méthode change au fur et à mesure des étapes. Notons L_0 et l_0 leurs valeurs initiales et L_n et l_n leurs $n^{\text{ième}}$ valeurs.

1. Que valent L_1 et l_1 ? L_2 et l_2 ?
2. Proposer une expression pour définir les suites $(\mathrm{L}_n)_{\mathbb{N}}$ et $(l_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{L}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{L}_n + \dfrac{2}{\mathrm{L}_n}}{2}$
4. Conjecturer d'après ce qui précède la valeur limite de la suite (L_n)

PARTIE C : **Avec un algorithme**

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par le programme suivant :

Algorithme 1 :

Entrée(s) :
n et A sont des nombres entiers.
Variable(s) :
i est un nombre entier.
u est un nombre réel.
Début
  $u := 1$
  Pour i allant de 1 à n **Faire**
    $u := \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{\mathrm{A}}{u}\right)$
  Fin Pour
  Afficher u
Fin

1. Donner la définition par récurrence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Que fait cet algorithme ?
3. Pour A = 2 :
   - **a.** Calculer u_0 ; u_1 et u_2.
   - **b.** Que semble calculer la suite (u_n) ?
4. Choisir une autre valeur de A et reprendre la question précédente.
5. Programmer cet algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur (recopier le programme sur votre feuille en précisant le langage)
6. Quelle valeur de n et de A faut-il rentrer pour obtenir une valeur approchée à 10^{-7} près de $\sqrt{97}$?

Cette suite s'appelle la suite de Héron