DEVOIR MAISON 3BIS : RÉVISIONS

Exercice 1 : ★★

PARTIE A : **Une seule boule**

1. X $\in \{-3\ ;\ 2\}$

2.

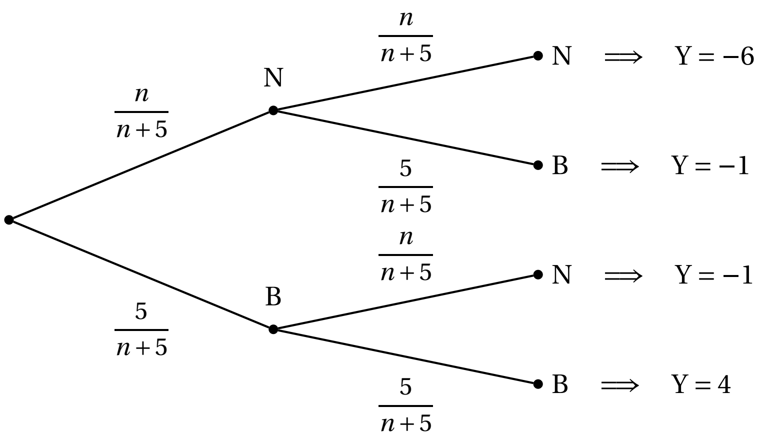
x_i	-3	2	Total
$P(X = x_i)$	$\dfrac{n}{n+5}$	$\dfrac{5}{n+5}$	$\dfrac{n+5}{n+5} = 1$

3. $E(X) = -3 \times \dfrac{n}{n+5} + 2 \times \dfrac{5}{n+5} = \ldots = \dfrac{-3n+10}{n+5}$

4. Le jeu est défavorable lorsque $E(X) < 0 \iff \dfrac{-3n+10}{n+5} < 0$.
   Or $n \geq 3$ donc $n+5 > 0$. On cherche donc n tel que $-3n+10 < 0 \iff -3n < -10 \iff n > \dfrac{10}{3}$.
   Comme n est entier, on peut conclure que le jeu est défavorable pour tout $n \geq 4$.

PARTIE B : **Deux boules avec remise**

Un arbre peut nous aider à répondre :



1. Y $\in \{-6\ ; -1\ ;\ 4\}$

2.

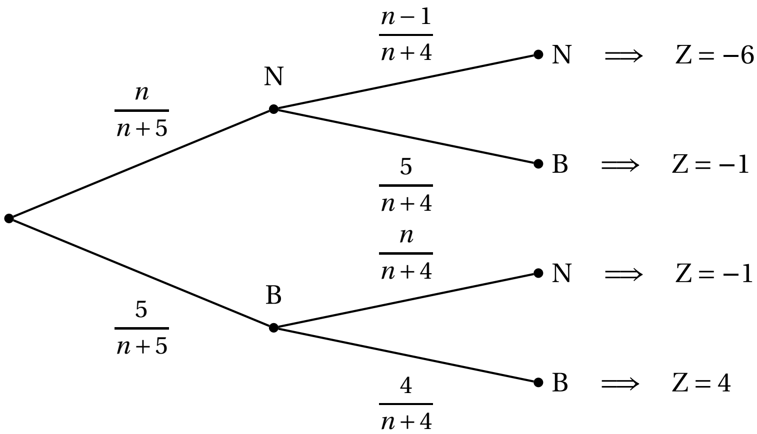
y_i	-6	-1	4	Total
$P(Y = y_i)$	$\dfrac{n^2}{(n+5)^2}$	$\dfrac{10n}{(n+5)^2}$	$\dfrac{25}{(n+5)^2}$	$\dfrac{n^2+10n+25}{(n+5)^2} = 1$

3. $E(Y) = -6 \times \dfrac{n^2}{(n+5)^2} - 1 \times \dfrac{10n}{(n+5)^2} + 4 \times \dfrac{25}{(n+5)^2} = \ldots = \dfrac{-6n^2 - 10n + 100}{(n+5)^2}$

4. Le jeu est défavorable lorsque $E(Y) < 0 \iff \dfrac{-6n^2-10n+100}{(n+5)^2} \iff -6n^2 - 10n + 100$.
   Or $\Delta = (-10)^2 - 4 \times (-6) \times 100 = \ldots = 2500 = 50^2$. D'où $n_1 = \dfrac{10-50}{-12} = \dfrac{10}{3}$ et $n_2 = \dfrac{10+50}{-12} < 0$
   $-6 < 0$ donc le trinôme $-6n^2 - 10n + 100$ est négatif à l'extérieur des racines n_1 et n_2
   Comme $n \geq 3$ et n entier, on peut conclure que le jeu est défavorable pour tout $n \geq 4$

PARTIE C : **Deux boules sans remise**

Un arbre peut nous aider à répondre :



1. $Z \in \{-6\,;-1\,;\,4\}$

2.

z_i	-6	-1	4	Total
$P(Z=z_i)$	$\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}$	$\dfrac{n(n-1)+10n+20}{(n+5)(n+4)}=1$

3. $E(Z) = -6\times\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} - 1\times\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)} + 4\times\dfrac{20}{(n+5)(n+4)} = \ldots = \dfrac{-6n^2-4n+80}{(n+5)(n+4)}$

4. Le jeu est défavorable lorsque $E(Z) < 0 \iff \dfrac{-6n^2-4n+80}{(n+5)(n+4)}$
Or $n \geq 3$ donc cela revient à chercher n tel que $-6n^2-4n+80<0$.
Or $\Delta = (-4)^2 - 4\times(-6)\times 80 = \ldots = 1936 = 44^2$. D'où $n_1 = \dfrac{4-44}{-12} = \dfrac{10}{3}$ et $n_2 = \dfrac{4+44}{-12} < 0$
$-6<0$ donc le trinôme $-6n^2-4n+80$ est négatif à l'extérieur des racines n_1 et n_2
Comme $n\geq 3$ et n entier, on peut conclure que le jeu est défavorable pour tout $n \geq 4$

PARTIE D : **Avec une mise de départ**

Dans cette question, pour pouvoir jouer, on doit donner 4 €.

1. Avec une mise de départ de 4€ on obtient les nouvelles espérances suivantes : $E(X') = E(X-4) = E(X)-4 = \dfrac{-3n+10}{n+5} - 4 = \ldots = \dfrac{-7n-10}{n+5} < 0$ car $n>0$ $E(Y') = E(Y-4) = E(Y)-4 = \dfrac{-6n^2-10n+100}{(n+5)^2} - 4 = \ldots = \dfrac{-10n^2-50n}{(n+5)^2} < 0$ car $n>0$ $E(Z') = E(Z-4) = E(Z)-4 = \dfrac{-6n^2-4n+80}{(n+5)(n+4)} - 4 = \ldots = \dfrac{-10n^2-40n}{(n+5)(n+4)} < 0$ car $n>0$

2. Les trois espérances sont clairement négatives pour tout $n\geq 3$, donc aucun jeu n'est intéressant, pour n'importe quelle valeur de n.

Exercice 2 : ⋆

1. a. $\Delta_P = \ldots = -1 < 0$ donc P n'a pas de racine réelle.
On en déduit le tableau de signe ci-contre ($a>0$) :

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $P(x)$	$+$

$\Delta_T = \ldots = 29 > 0$
Donc $x_1 = \ldots = \dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \ldots = \dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$.
On en déduit le tableau de signe ci-contre ($a<0$) :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
Signe de $T(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $P(0) = \ldots = 5$ et $T(0) = -13$.

2. a. $P(0)=5$ donc $\mathscr{C}_P$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,5)$.
P n'a pas de racine réelle, donc $\mathscr{C}_P$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

b. $T(0)=-13$ donc $\mathscr{C}_T$ coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;\,-13)$.
T possède deux racines réelles x_1 et x_2, donc $\mathscr{C}_T$ coupe l'axe des abscisses en $(x_1\,;\,0)$ et $(x_2\,;\,0)$.

c. D'après le tableau de signes de $P(x)$, on peut dire que $\mathscr{C}_P$ est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

d. D'après le tableau de signes de $\mathrm{T}(x)$, on peut dire que $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ est au-dessus de l'axe des abscisses si et seulement si $x \in]x_2\ ;\ x_1[$

3. **a.** $\mathrm{P}(x) = \mathrm{T}(x) \iff \mathrm{P}(x) - \mathrm{T}(x) = 0 \iff \ldots \iff \dfrac{3}{2}x^2 - 12x + 18 = 0$

$\Delta_{\mathrm{P-T}} = \ldots = 36 = 6^2$ Donc $x_1 = \ldots = 2$ et $x_2 = \ldots = 6$.

Nous avons trouvé les abscisses des points d'intersection.

Cherchons les ordonnées correspondantes, ie les images de 2 et 6 par P ou T, comme l'on veut puisque ce sont les mêmes. $\mathrm{T}(2) = \ldots = 1$ et $\mathrm{T}(6) = \ldots = 5$.

Les courbes se coupent en $(2\ ;\ 1)$ et $(6\ ;\ 5)$

b. $\mathscr{C}_\mathrm{P}$ est au-dessus de $\mathscr{C}_\mathrm{T}$ si et seulement si $\mathrm{P}(x) - \mathrm{T}(x) > 0 \iff \dfrac{3}{2}x^2 - 12x + 18 > 0$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
Signe de $\mathrm{P}(x) - \mathrm{T}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Ordre de $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{T}(x)$		$\mathrm{P}(x) > \mathrm{T}(x)$		$\mathrm{P}(x) < \mathrm{T}(x)$		$\mathrm{P}(x) > \mathrm{T}(x)$	
Position relative des courbes		$\mathscr{C}_\mathrm{P}$ au-dessus de $\mathscr{C}_\mathrm{T}$		$\mathscr{C}_\mathrm{P}$ en-dessous de $\mathscr{C}_\mathrm{T}$		$\mathscr{C}_\mathrm{P}$ au-dessus de $\mathscr{C}_\mathrm{T}$	

Exercice 3 : ⋆ ⋆ ⋆

PARTIE A : **Echauffement**

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations trigonométriques suivantes :

a. $\sin x = -1$

Un unique point du cercle est associé à des réels dont le sinus vaut -1 ; ces réels sont de la forme $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$; ce qui nous permet de conclure que :

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. $\sin x = 2$

Nous savons que pour tout réel x $-1 \leq \sin x \leq 1$, par conséquent il n'existe aucun nombre réel tel que $\sin x = 2$.

$$\mathscr{S} = \emptyset$$

c. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

Deux points du cercle trigonométrique sont associés à des réels dont le sinus vaut $-\dfrac{1}{2}$, les premiers sont tous de la forme $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ et les autres sont de la forme $\dfrac{-5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ce qui donne :

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}; \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. On sait que pour tout réel x on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ D'où :

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \iff 2\sin^3 x + 1 - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \iff 2\sin^3 x - \sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$$

PARTIE B : **Polynômes**

1.

$$P(-1) = 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 5 \times (-1) - 2 = -2 - 1 + 5 - 2 = 0$$

2. Supposons qu'il existe trois réels a, b et c qui vérifient $P(X) = (X+1)(aX^2 + bX + c)$. Dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & aX^3 + bX^2 + cX + aX^2 + bX + c \\ \Longleftrightarrow 2X^3 - X^2 - 5X - 2 & = & aX^3 + (b+a)X^2 + (c+b)X + c \end{array}$$

Donc en choisissant a, b, c tels que $\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b + a = -1 \\ c + b = -5 \\ c = -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{array}\right.$ on a l'égalité voulue.

On vient de démontrer que :

$$P(X) = 2X^3 - X^2 - 5X - 2 = (X+1)(2X^2 - 3X - 2)$$

3.

$$P(X) = 0 \Longleftrightarrow (X+1)(2X^2 - 3X - 2) = 0$$

Or, un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul d'où :

$$\begin{array}{rcl} P(X) = 0 & \Longleftrightarrow & X + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2X^2 - 3X - 2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & X = -1 \quad \text{ou} \quad 2X^2 - X - 2 = 0 \end{array}$$

Pour résoudre $2X^2 - 3X - 2 = 0$ calculons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ donc l'équation $2X^2 - 3X - 2 = 0$ admet deux solutions :

$$X_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{4} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

Au final le polynôme P admet 3 racines qui sont -1 ; $-\frac{1}{2}$ et 2.

PARTIE C : **Trigonométrie**

1. On cherche à résoudre (E), ce qui revient à résoudre $2\sin^3 x - \sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$ puisque cette équation a les mêmes solutions que l'équation (E) d'après la question A2.
En posant $X = \sin x$ cette dernière équation devient :

$$2X^3 - X^2 - 5X - 2 = 0 \Longleftrightarrow P(X) = 0 \Longleftrightarrow X = -1 \quad \text{ou} \quad X = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad X = 2$$

Ainsi l'ensemble des solutions x de (E) vérifient

$$\sin x = -1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = 2$$

On utilise alors les résultats de la première question pour déduire l'ensemble des solutions de (E) que voici :

$$\mathscr{S} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \,;\, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \,;\, \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Figure évidente.