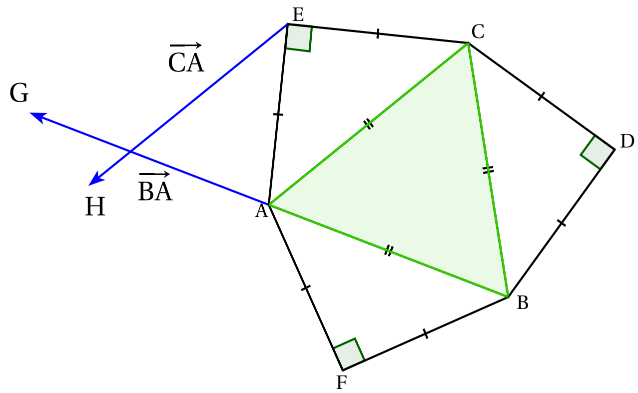
Exercice 1 : (5 points)



Le triangle ACE est direct rectangle isocèle en A.
Par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$$

En déplaçant le vecteur $\overrightarrow{BA}$, on constate que : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AC}\right)$, par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

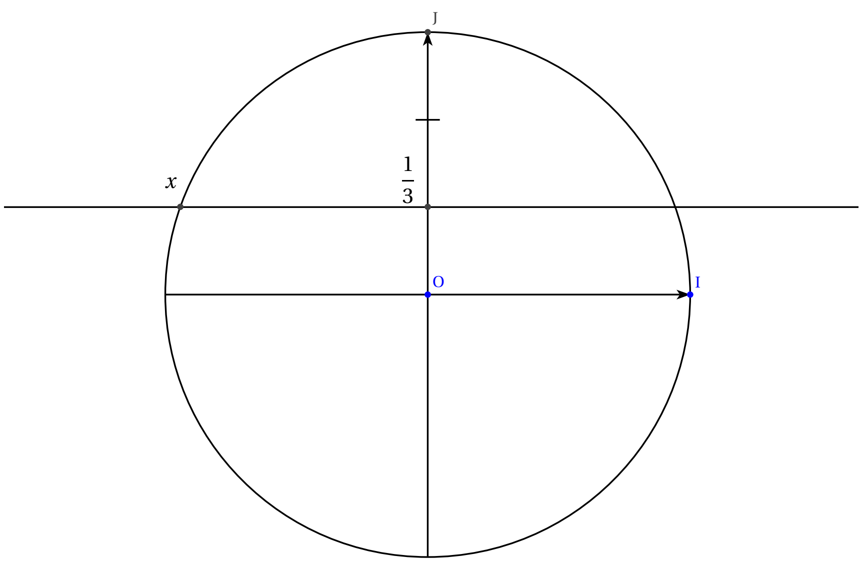
On utilise la relation de Chasles :

$$\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{12}$$

Et enfin, en déplaçant le vecteur $\overrightarrow{CA}$, on constate que $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EH}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}\right)$ comme angles alternes-internes formés par les parallèles (EH) et (CA) et la sécante (EA). Donc :

$$\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Exercice 2 : (4 points)



1.
2. Puisque $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ on a $\cos x<0$.
3. On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\iff\cos^2 x+\frac{1}{9}=1\iff\cos^2 x=\frac{8}{9}\iff\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}\quad\text{ou}\quad\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$$

D'après la question précédente $\cos x<0$, par conséquent $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

4. A la calculatrice on trouve $x=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)\simeq 2,8$

Exercice 3 : (6 points)

1. **a.** A l'aide d'un cercle trigonométrique que l'on a dessiné on trouve :
   - Dans $]-\pi;\pi]$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$
   - Dans $[0;2\pi[$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$
   - Dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$ où k désigne un entier.

   b. $10<\frac{65}{6}<11 \iff 10\pi<\frac{65}{6}\pi<11\pi \overset{-10\pi=-5\text{tours}}{\iff} 0<\frac{5}{6}\pi<\pi$

   La mesure principale de $\frac{65}{6}\pi$ est $\frac{5}{6}\pi$. En fait on peut même dire que $\frac{65}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi+5\times2\pi$

   Par conséquent le nombre $\frac{65\pi}{6}$ est solution de l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ (avec $k=5$).

2. **a.** De même on trouve :

$$\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$$

   b. $-8<-\frac{22}{3}<-7 \iff -8\pi<-\frac{22}{3}\pi<-7\pi \overset{+8\pi=4\text{tours}}{\iff} 0<\frac{2}{3}\pi<\pi$

   La mesure principale de $-\frac{22}{3}\pi$ est $\frac{2}{3}\pi$. En fait on peut même dire que $-\frac{22}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+4\times2\pi$

   Ainsi le nombre $-\frac{22\pi}{3}$ n'est pas solution de l'équation $\cos(x)=\frac{1}{2}$, puisque $\cos\frac{-22\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

3. **a.** De même on trouve

$$\mathscr{S}=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$$

   b. Grâce au cercle, on lit dans $]-\pi;\pi]$ que $\cos(x)>-\frac{\sqrt{2}}{2} \iff -\frac{3\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$, par conséquent :

$$\mathscr{S}=\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$$

Exercice 4 : *de la trigonométrie avec* $\frac{\pi}{8}$ (10 points)

1. Voir la figure à la fin

   2. Par définition du sinus et du cosinus, B a pour coordonnées :

$$\left(\cos\frac{\pi}{4};\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

   Voir la figure.

   b. Le triangle HIB est rectangle en H.

   Des coordonnées de B on tire $HB=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus $OI=1$, et par conséquent $HI=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
& IB^2=HI^2+HB^2\\
\iff\ & IB^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\
\iff\ & IB^2=1-\sqrt{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\\
\iff\ & IB^2=2-\sqrt{2}\\
\iff\ & IB=\sqrt{2-\sqrt{2}}\simeq0,77
\end{aligned}$$

On vient de trouver la longueur IB en unité graphique, par conséquent $\text{IB} = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 6,1$ cm.

3. **a.** On observe que OB = OI = 1, ainsi le triangle OIB est isocèle en O. De plus la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OI}};\overrightarrow{\text{OB}}\right)$. (OA) est donc aussi une hauteur dans le triangle OIB, et par conséquent :

$$(\text{OA}) \perp (\text{IB}) \Longrightarrow \text{le triangle OIK est rectangle en K.}$$

b. Dans le triangle OIK on a :

$$\sin\left(\overrightarrow{\text{OI}};\overrightarrow{\text{OA}}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \Longleftrightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\text{KI}}{\text{OI}} = \text{KI}$$

c. Or, $\text{KI} = \frac{1}{2}\text{IB}$ et $\text{IB} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ ainsi :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

4. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos^2 x + \sin x = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
& \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos^2\frac{\pi}{8} + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos^2\frac{\pi}{8} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{4-2+\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\
\Longleftrightarrow \quad & \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

Or, $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ Donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$. On en conclut que :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

5. D'après les questions précédentes on sait que :

$$A\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Les coordonnées de A et de la symétrie de la figure on déduit celles de C, D, E, F et G :

$$C\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \qquad D\left(\frac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \qquad E\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) \qquad G\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$