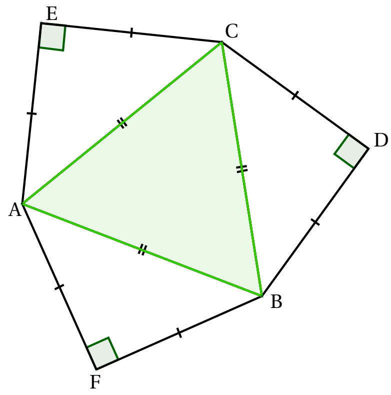
Devoir Maison 3 : Un exemple de devoir surveillé de trigonométrie

Exercice 1 : **(5 points)**

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD, ACE et AFB sont des triangles rectangles isocèles directs respectivement en D, E et F.
Déterminer la mesure principale, en radians, des angles suivants :

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{CA}\right)$



Indication :
Compléter la figure en déplaçant des vecteurs.

Exercice 2 : On prendra 3 cm comme unité graphique. **(4 points)**

On sait qu'un réel x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et que $\sin(x) = \frac{1}{3}$.

1. Placer x sur le cercle trigonométrique.
2. Quel est le signe de $\cos x$?
3. Calculer $\cos(x)$ **(en valeur exacte)**.
4. Donner une valeur approchée de x à 10^{-2} près, à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3 : **(6 points)**

1. **a.** Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ dans :
   - $]-\pi;\pi]$
   - $[0;2\pi[$
   - $\mathbb{R}$

   b. Le nombre $\frac{65\pi}{6}$ est-il solution de cette équation dans $\mathbb{R}$?
2. **a.** Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

   b. Le nombre $-\frac{22\pi}{3}$ est-il solution de cette équation dans $\mathbb{R}$?
3. **a.** Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   b. En déduire les solutions de l'inéquation $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.

Exercice 4 : *de la trigonométrie avec* $\frac{\pi}{8}$ (10 points)

On considère un repère orthonormal $(O; I, J)$. 8 cm représente 1 unité graphique.
On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O passant par I, soit B le point de $\mathscr{C}$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{4}$$

1. **a.** Construire la figure en laissant les traits de construction apparent.

   b. Placer le point $A \in \mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{8}$

   c. Placer les points C, D, E, F et G de $\mathscr{C}$ tels que :

   $$\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}\right) = -\frac{\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OD}\right) = \frac{7\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OE}\right) = -\frac{7\pi}{8} \qquad \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OF}\right) = \frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OG}\right) = \frac{5\pi}{8}$$

   d. Construire le polygone régulier à 16 côtés dont I, A et B ... sont des sommets.

2. **a.** Donner les coordonnées de B.

   b. On appelle H le point de coordonnées $(x_B; 0)$. Placer H.

   c. En vous plaçant dans le triangle rectangle HIB, calculer IB.
   On donnera la valeur exacte de IB dans l'unité du repère, puis la valeur de IB en cm, arrondie au dixième.

3. **a.** On note K le point d'intersection entre la droite (OA) et la droite (IB).
   Quelle est la nature du triangle OKI ? Justifier.

   b. En utilisant la trigonométrie de collège, montrer que $IK = \sin\frac{\pi}{8}$.

4. Déduire des question précédentes, la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{8}$.

5. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$.

6. Donner alors les coordonnées des points C, D, E, F et G.

Exercice 5 : **Question Cactus**

A quelle(s) heure(s) exactement les aiguilles des heures et des minutes d'une montre sont-elles superposées ?