Correction
DM 2

Exercice 1 : On appelle x et y les longueurs des deux côtés du triangle rectangle, adjacents à l'angle droit. On sait que x et y sont strictement positifs et qu'ils vérifient le système :

$$(S) : \begin{cases} x^2+y^2 = 72.5^2 \\ \dfrac{xy}{2} = 429 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5\,256.25 \\ xy = 858 \end{cases} \overset{(y\neq 0)}{\iff} \begin{cases} x^2+y^2 = 5\,256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \quad (y \neq 0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{736\,164}{y^2}+y^2 = 5\,256.25 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases} \overset{(y^2\neq 0)}{\iff} \begin{cases} 736\,164+y^4 = 5\,256.25y^2 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 - 5\,256.25y^2 + 736\,164 = 0 \\ x = \dfrac{858}{y} \end{cases}$$

La première équation est une équation bicarré. On pose alors $\mathrm{Y} = y^2$ et on est ramené à résoudre :

$$\mathrm{Y}^2 - 5\,256.25\mathrm{Y} + 736\,164 = 0$$

On trouve $\Delta = \ldots = (4\,968.25)^2$. Donc les solutions sont $\mathrm{Y}_1 = \dfrac{5\,256.25-4\,968.25}{2} = 144$ et $\mathrm{Y}_2 = 5\,112.25$.
Or $\mathrm{Y} = y^2$. On cherche donc les solutions y des équations $y^2 = 144$ et $y^2 = 5112.25$.
Or $y^2 = 144 \iff y = 12$ ou $y = -12$ et $y^2 = 5112.25 \iff y = 71.5$ ou $y = -71.5$.
Comme $y > 0$, on a forcément $y_1 = 12$ ou $y_2 = 71.5$.
De plus, $x = \dfrac{858}{y}$ donc on a $x_1 = 71.5$ et $x_2 = 12$ (logique car les rôles de x et y sont symétriques).
Ainsi, le périmètre du triangle rectangle est $\mathrm{P} = 12 + 71.5 + 72.5 = 156\,\mathrm{m}$.

Exercice 2 : **La puissance de l'infini ...**

1. **a.** $10a = 9,\underline{9} = 9 + 0,\underline{9} = 9 + a$

   b. On résout l'équation ci-dessus. On a : $10a = 9 + a \iff 9a = 9 \iff a = 1$.
   Ainsi $0,\underline{9} = 1$.

2. **a.** $\Phi^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = 1+\Phi$

   b. On sait que $\Phi^2 = \Phi + 1 \iff \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
   On trouve $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-1) = 5$ Donc les solutions sont $\Phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Il est clair que $\Phi > 0$, ainsi $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   c. On sait que $\Phi^2 = \Phi + 1 \iff \Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ car $\Phi \neq 0$.

   d. Puisque $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ en remplaçant successivement Φ par cette expression, on peut aussi dire que :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = \ldots$$

Exercice 3 :

L'aire totale du drapeau vaut $3 \times 4 = 12$ m^2 et l'aire de la croix blanche vaut la moitié de celle du drapeau c'est-à-dire elle vaut $\dfrac{12}{2} = 6$ m^2.

D'autre part, recalculons l'aire de la croix blanche d'une manière différente, en notant x la largeur de la croix. L'aire des rectangles formant la croix blanche vaut alors $3 \times x$ m^2 et $4 \times x$ m^2. L'aire de la croix blanche est la somme des aires des rectangles la formant auquel on enlève l'aire du carré central (compté deux fois, dans chacun des deux rectangles) et donc l'aire de la croix blanche vaut :

$$3x + 4x - x^2 = 7x - x^2$$

Ainsi on cherche à résoudre $\quad 7x - x^2 = 6 \iff 0 = x^2 - 7x + 6$ On a déjà résolu cette équation lors de la question précédente, elle admet deux solutions 1 et 6. Cependant il est impossible d'avoir $x = 6$ puisque le drapeau est de taille 4×3 donc le problème admet une unique solution qui est $x = 1$ m.

Ainsi la largeur de la croix blanche vaut 1 m.

Exercice 4 : On considère l'équation (E_m) d'inconnue x suivante $\quad (m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \qquad (E_m)$

1. L'équation (E_m) n'est pas une équation du second degré si et seulement si $m - 1 = 0 \iff m = 1$.
   Dans ce cas on résout (E_1) i.e. $-2x + 4 = 0 \iff -2x = -4 \iff x = 2$.
   L'unique solution de (E_1) est donc $x = 2$.
2. Calculons le discriminant de l'équation (E_m) dans le cas où $m \neq 1$:

   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4\times(m-1)\times(m+3) = 4m^2 - 4(m^2+3m-m-3) = 4m^2 - 4(m^2+2m-3) = 4m^2 - 4m^2 - 8m + 12$$

   Au final $\quad \Delta = -8m + 12$

   L'équation (E_m) admet exactement une solution si et seulement si $m = 1$ ou $\Delta = 0 \iff -8m + 12 = 0 \iff -8m = -12 \iff m = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

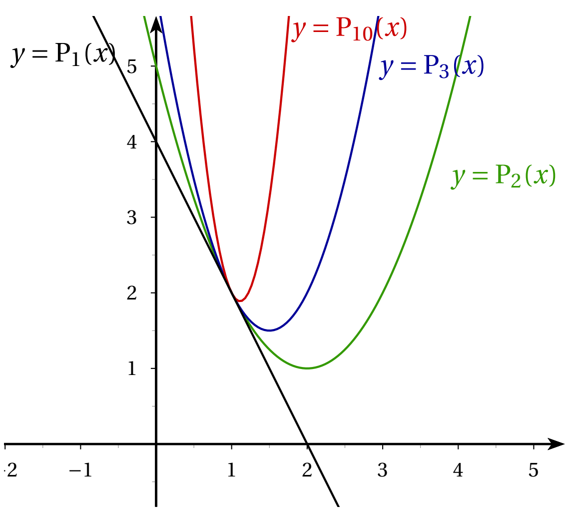
   De plus $\Delta > 0 \iff -8m + 12 > 0 \iff -8m > -12 \iff m < \dfrac{3}{2}$.

   Conclusion :

   $\rightsquigarrow$ L'équation (E_m) admet exactement deux solutions si et seulement si $m < \dfrac{3}{2}$ et $m \neq 1$

   $\rightsquigarrow$ L'équation (E_m) admet exactement une solution si et seulement si $m = \dfrac{3}{2}$ ou $m = 1$.

   $\rightsquigarrow$ L'équation (E_m) n'admet aucune solution si et seulement si $m > \dfrac{3}{2}$.
3. Afin de conjecturer la réponse, on a représenté les courbes des fonctions P_1, P_2, P_3 et P_{10}.



Conjecture : Très clairement il semble que ces quatre courbes passent par le point A(1;2).

Prouvons le, pour cela montrons que $P_m(1) = 2$ quelque soit la valeur de m :

$$\begin{aligned} P_m(1) &= (m-1)\times 1^2 - 2m \times 1 + m + 3 \\ &= (m-1) - 2m + m + 3 \\ &= m - 1 - m + 3 = 2 \end{aligned}$$

On vient de démontrer que quelque soit la valeur du réel m, les courbes d'équations $y = P_m(x)$ passent par le point A(1;2).