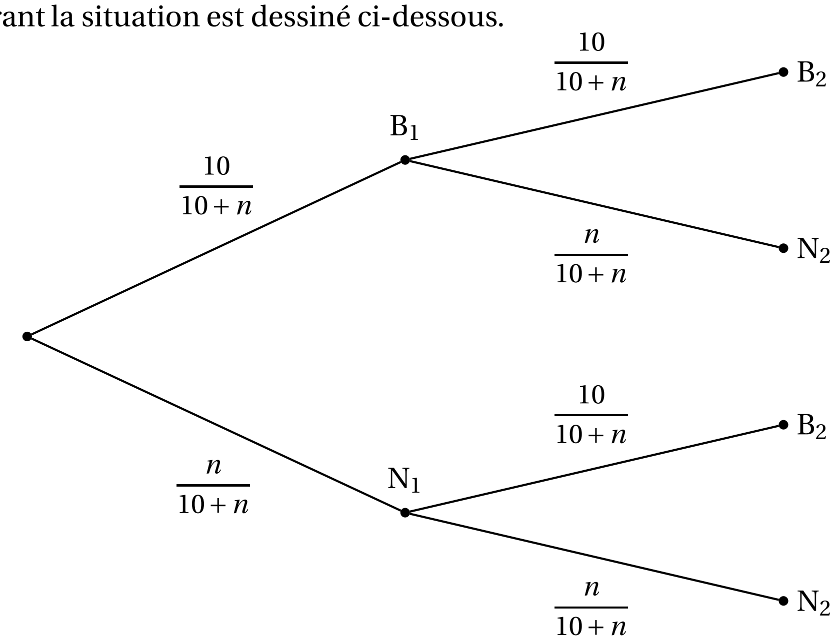
∽ Correction DM ∽
Série Noire

1. On dispose de 10 boules blanches et d'un nombre inconnu de boules noires. Appelons ce nombre n.
Il y a alors $10+n$ boules dans l'urne.
Appelons B_i l'événement « Piocher une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage »
et N_i l'événement « Piocher une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage »
L'arbre illustrant la situation est dessiné ci-dessous.



Grâce au tableau de l'énoncé, on lit $P(X=0)=\dfrac{9}{64}$. Autrement dit, la probabilité d'avoir 0 boule blanche (donc que des boules noires) vaut $\dfrac{9}{64}$.

Grâce à l'arbre, on sait aussi que cette probablité vaut $P\left(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2\right)=\dfrac{n}{10+n}\times\dfrac{n}{10+n}=\dfrac{n^2}{(10+n)^2}$.
Ainsi on doit avoir

$$\frac{n^2}{(10+n)^2}=\frac{9}{64}$$

On pense de suite à $n=3$ pour avoir l'égalité aux dénominateurs. Mais $(10+3)^2 \neq 64$!
C'est donc que la fraction $\dfrac{9}{64}$ est simplifiée ... Pour trouver n, il y a alors plusieurs méthodes :

- ⇝ un tableau de valeurs de la fonction $n \longmapsto \dfrac{n^2}{(10+n)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ pourrait convenir ici puisqu'il s'agit d'une narration de recherche, mais ce n'est pas très rigoureux (on ne peut pas être sûr qu'une seule valeur pour n est possible).
  Je ne le reproduis donc pas ici.
- ⇝ résoudre l'équation (là encore on a le choix de la méthode de résolution, je propose la plus rapide)

$$\begin{aligned}
\frac{n^2}{(10+n)^2}=\frac{9}{64} &\iff 64n^2=9(10+n)^2 \\
&\iff (8n)^2=\big(3(10+n)\big)^2 \\
&\iff 8n=3(10+n) \quad \text{ou} \quad 8n=-3(10+n) \\
&\iff \dots \\
&\iff n=6 \qquad \text{ou} \qquad n=-\frac{11}{30}
\end{aligned}$$

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

Il y a donc 6 boules noires dans l'urne puisque l'autre solution trouvée est impossible (pour deux raisons : nombre de boules négatif et non entier)
Vérification : Pour être sûre, je regarde si j'obtiens bien le tableau complet avec $n = 6$.
Grâce à l'arbre, on a

$$P(X = 2) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{16} * \frac{10}{16} = ... = \frac{25}{64}$$

Donc c'est bon ! (P(X = 1) qui est plus long à calculer sur l'arbre, s'obtient par complémentarité et est donc forcément le même dans les deux cas.)

2. On appelle m la mise initiale et Y la variable aléatoire qui donne le gain d'une partie. On a donc le tableau suivant :

y_i	$0-m$	$1-m$	$2-m$	Total
$P(Y = y_i)$	$\frac{9}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{25}{64}$	1

On veut que le jeu soit équitable donc que $E(Y) = 0$. Or

$$E(Y) = -m \times \frac{9}{64} + (1-m) \times \frac{30}{64} + (2-m) \times \frac{25}{64} = ... = \frac{5}{4} - m$$

Ainsi $E(Y) = 0 \iff m = \frac{5}{4} = 1,25$.
Pour que le jeu soit équitable, il faut choisir une mise de départ de 1,25€.

On aurait pu procéder autrement en utilisant la linéarité de l'espérance (ce qui simplifie les calculs).
En effet, il est clair que $Y = X - m$ donc $E(Y) = E(X-m) = E(X) - m = ... = \frac{5}{4} - m$.
On retrouve évidemment le même résultat.

3. Commençons par calculer la variance de Y.

$$V(Y) = (-1,25)^2 \times \frac{9}{64} + (-0,25)^2 \times \frac{30}{64} + (0,75)^2 \times \frac{25}{64} - 0^2 = ... = \frac{15}{32}$$

D'où un écart-type $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8} \simeq 0.68$
Ce nombre mesure le risque du jeu.