Exercices
Trigonométrie

Exercice 1 : MNP est un triangle équilatérale direct, ie tel que $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) = +\frac{\pi}{3}$ et I est le milieu de [NM]. Faire un schéma de la situation puis lire graphiquement une mesure de chacun des angles ci-dessous :

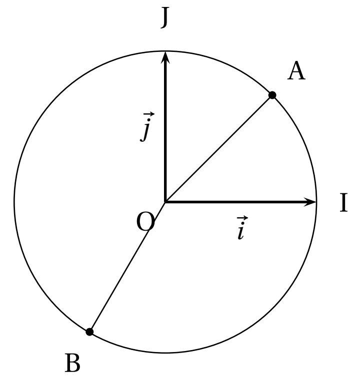
$$(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PM}) \qquad (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PN}) \qquad (\overrightarrow{NM},\overrightarrow{MP}) \qquad (\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PI})$$

Exercice 2 : Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O ci-contre, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{IOA} = 45^\circ \qquad \text{et } \widehat{IOB} = -120^\circ$$

Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ **2.** $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ **3.** $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$



Exercice 3 : ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB}) = \frac{\pi}{3}$

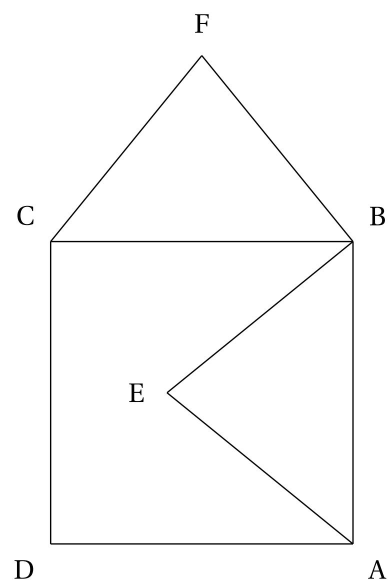
Le schéma n'est pas à l'échelle

On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

1. **a.** Démontrer que le triangle ADE est isocèle

   b. Démontrer que $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA}) = \frac{5\pi}{12}$
2. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF})$
3. **a.** En utilisant ce qui précède, calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$

   b. Conclure



Exercice 4 : Construire les points A, B, C, E et F du cercle trigonométrique de centre O sachant que :

$$\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{8} \quad ; \quad \left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right) = -\frac{5\pi}{6} \quad ; \quad \left(\vec{i};\overrightarrow{OE}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OF};\vec{j}\right) = \frac{\pi}{3}$$

On se placera dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal direct ce qui signifie que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour longueur 1 et de plus $(\vec{i};\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 : Sans calculatrice, dire si les réels suivants sont des mesures principales en radians d'angles orientés : $\frac{7\pi}{5}$ $\quad -\frac{13\pi}{5}$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad -\frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3}$ $\quad -\frac{7\pi}{6}$ $\quad \frac{37\pi}{36}$

Exercice 6 : Les réels $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ?

Donner la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $-\frac{17\pi}{3}$

Exercice 7 : Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle dont on donne une mesure en radians.

- ⇝ $\dfrac{5\pi}{4}$
- ⇝ $-\dfrac{10\pi}{3}$
- ⇝ $\dfrac{17\pi}{13}$
- ⇝ $-\dfrac{4\pi}{3}$
- ⇝ 135π
- ⇝ $\dfrac{-185\pi}{6}$

Exercice 8 : Soit $a = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$. Exprimer en fonction de a : $\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ $\sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$ $\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$

Exercice 9 : A l'aide des propriétés sur les angles associés, calculer la valeur exacte de :

- ⇝ $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$
- ⇝ $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$
- ⇝ $\cos\left(\dfrac{79\pi}{6}\right)$
- ⇝ $\sin\dfrac{7\pi}{6}$
- ⇝ $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$

Exercice 10 :

1. Placer au mieux sur le cercle trigonométrique les points repérés par les réels :

$$\frac{2\pi}{7} \ ; \ \frac{4\pi}{7} \ ; \ \frac{6\pi}{7} \ ; \ \frac{8\pi}{7} \ ; \ \frac{10\pi}{7} \ ; \ \frac{12\pi}{7}$$

2. On pose :

$$\mathscr{S} = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}' = \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$$

$$\Sigma = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} \quad \text{et} \quad \Sigma' = \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$$

1. Comparer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$, puis Σ et Σ'.
2. Calculer Σ et Σ'.

Exercice 11 : Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points $A(-2\sqrt{3}; -2)$ et $B(-3; 3\sqrt{3})$.
Construire les points A et B

Exercice 12 : **Algorithme**
On donne l'algorithme ci-contre.

1. **a.** Indiquer la sortie de cet algorithme pour les valeurs de a en entrée suivantes : 0, π, 3π et 10.
   b. Que fait l'algorithme ?
   c. Indiquer la sortie de l'algorithme pour $a = -3\pi$.
2. **a.** Modifier l'algorithme pour qu'il donne la mesure principale d'un angle de mesure a.
   b. Programmer l'algorithme modifié à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
a et $tour$ sont deux nombres réels
Début
  Entrer a
  $tour := 2\pi$
  Tant que ($a > \pi$) **Faire**
    $a := a - tour$
  Fin Tant que
  Sorties : Afficher a
Fin

Exercice 14 : Sachant que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 15 : Sachant que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$:

1. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice 16 : Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$:

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice 17 : **Vrai ou Faux, à justifier**

Soit $\theta\in[\pi;2\pi]$ tel que $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ alors on a :

1. $\sin\theta\leq 0$
2. $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$
3. $\sin\theta=0,6$
4. $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

Exercice 18 : **Vrai ou Faux, à justifier**

Soit $\theta\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta=\frac{1}{4}$ alors on a :

1. $\cos\theta\leq 0$
2. $\cos\theta=\frac{3}{4}$
3. $\cos\theta=-\frac{\sqrt{15}}{4}$
4. $\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice 19 : Sylvia, la petite amie de Norbert, propose deux nouvelles formules trigonométriques :

$$\cos 2a=2\cos a \qquad \text{et} \qquad \sin 2a=2\sin a$$

Ces deux formules sont-elles :

- ⇝ vraies pour tout nombre réel a ?
- ⇝ vraies pour quelques valeurs de a ? Si oui, lesquelles ?
- ⇝ fausses pour toute valeur de a ?

Exercice 20 : A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant :

1. $\cos x=\frac{1}{2}$ et $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[-\pi;\pi]$.
2. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.
3. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in[-\pi;3\pi]$.
4. $\cos x=0$ et $\sin x=-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 21 :

1. La proposition P suivante est-elle vraie ?
   P : « Si $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ »
2. Enoncer la réciproque R de cette proposition P. Est-elle vraie ?
3. Même question pour la contraposée C de P.

Exercice 22 : Compléter par « il faut » ou « il suffit » :

1. Pour que $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ... que $x=\dfrac{\pi}{6}$
2. Pour que $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0\quad[2\pi]$, ... que les points A, M et B soient alignés.
3. Pour que $\sin(x)\geq 0$, ... que $x\in[0;\pi]$
4. Pour que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$, ... que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 23 : Des enseignants cherchent à résoudre l'équation $\cos x=\dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ **(4 points)**

Loïc propose : « $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc $x=\dfrac{\pi}{3}$ ».
Fabrice s'étonne : « Quand je tape sur la calculatrice $\cos^{-1}(0.5)$, la calculatrice me donne 60, donc $x=60$ ».
Myriam affirme : « J'ai trouvé deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisse $\dfrac{1}{2}$, donc cette équation a deux solutions. »
Commentez ces réponses et résoudre le problème.

Exercice 24 : Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ tels que $\cos(t)=-\dfrac{1}{2}$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

Exercice 25 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis dans chaque cas, donner les solutions dans $[2\pi;5\pi[$

1. $\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x)=-1$
4. $\sin(x)=0$

Exercice 26 : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

1. $\sin x=\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ avec $I=\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
2. $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ avec $I=[0;2\pi[$

Exercice 27 : Sur l'intervalle $[0;2\pi]$, les solutions de l'inéquation $\cos\theta\geq-\dfrac{1}{2}$ sont :

1. $\left[\dfrac{-2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. $\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right]$
3. $\left[\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right]$
4. $\left]0;\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right[$

Exercice 28 : À l'aide d'une figure, résoudre les inéquations suivantes :

1. $\cos(x)\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[0;2\pi[$
2. $\sin(x)\geq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x\in[-\pi;\pi[$
3. $\cos(x)\geq\dfrac{1}{2}$ pour $x\in[-\pi;\pi[$
4. $\sin(x)<\dfrac{1}{2}$ pour $x\in[0;2\pi[$

Exercice 29 : Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi;\pi]$ puis ceux de $[0;2\pi[$ tels que :

1. $-\dfrac{1}{2}\leq\sin(t)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos(t)\leq 0$
3. $1-2\sin(t)>0$

Exercice 30 : Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$
2. $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$
3. $\sin(2\theta) = \cos\theta$

Exercice 31 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
2. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 32 : Calculer $\sin x$ et $\cos x$ sachant que l'on a :

$$2\sin x + 4\cos x = 5$$

Indication : On pourra utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Exercice 33 : QCM (plusieurs réponses possibles)

1. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{21}{29}$. Alors on a :
$$\cos(x) \leq 0 \qquad \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} \qquad \cos(x) = -\frac{20}{29} \qquad \cos(x) = \frac{20}{29}$$
2. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, les solutions de l'inéquations $\cos(x) \geq -\dfrac{1}{2}$ sont :
$$\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \qquad \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right] \qquad \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \qquad \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$$
3. Les solutions réelles de l'équation $\cos(x) = \sin\dfrac{\pi}{5}$ sont :
$$\left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \left\{\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\left\{\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \qquad \left\{\frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$