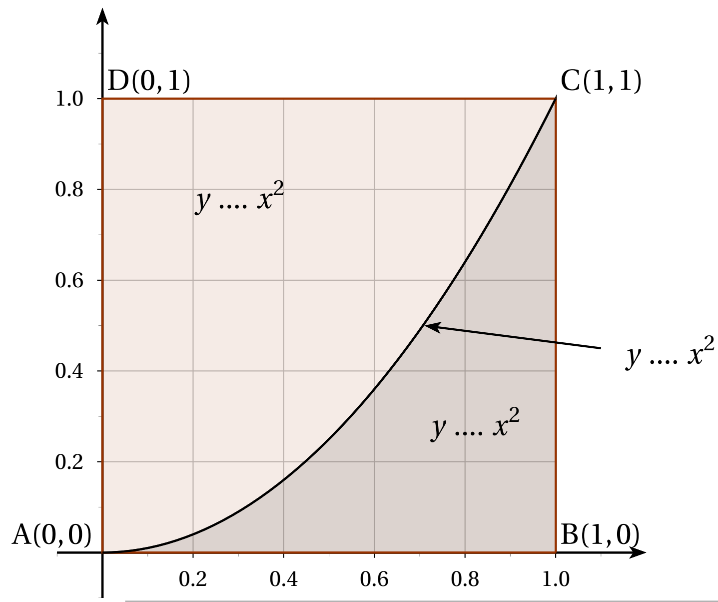
∽ EXERCICES ∽
VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1 : **La loi des Grands Nombres**
Norbert, un élève syldave studieux, lance des fléchettes sur une cible carrée de côté 1. Il atteint toujours la cible (ie le carré de côté 1) mais comme il n'est pas très doué, il pense que sa probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.
Il s'intéresse à la probabilité d'atteindre la zone sous la parabole $y = x^2$. Malheureusement, il ne sait pas encore calculer cette aire (il l'apprendra l'an prochain en Terminale S).
Il cherche donc à l'estimer par l'expérience, et pour cela, il a rédigé l'algorithme ci-dessous.



1. Expliquer en quoi cet algorithme simule le lancer de fléchettes en détaillant ce que représentent X, Y, N, A et K.
2. Que représente l'affichage pour le problème de Norbert ?
3. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, simuler 500 lancers et noter l'affichage en sortie.
4. Relancer votre programme plusieurs fois en notant les affichages successifs.
   Est-ce toujours les mêmes ? Pourquoi ?
5. Simuler 1 000 lancers et en déduire une valeur approchée de l'aire sous la parabole.

Remarque : Cette méthode s'appelle la méthode de Monte Carlo. On peut aussi l'utiliser pour trouver une valeur approchée de π.
Il suffit de considérer la courbe représentative de la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ sur $[0, 1]$ qui dessine un quart de cercle dans un carré de côté 1. Cependant, il faut beaucoup de lancers pour obtenir une bonne approximation de π.

Algorithme 1 :

Variable(s) :
N est un entier naturel
X et Y sont des réels compris entre 0 et 1
Entrée(s) :
A prend la valeur 0
Début
  Saisir N
  Pour K allant de 1 à N **Faire**
    X prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
    Si (Y > X^2) **Alors**
      A prend la valeur A+1
    Sinon
      K prend la valeur K+1
    Fin Si
  Fin Pour
Fin
Sorties : Afficher $\dfrac{A}{N}$

Exercice 2 : Dans le club de Norbert, plusieurs activités sont proposées dont le tir à l'arc et le golf. La cotisation de base pour adhérer au club est de 30€ auxquels s'ajoutent éventuellement :

- ⇝ 50€ pour pratiquer le tir à l'arc
- ⇝ 80€ pour pratiquer le golf.

Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 les deux sports. On choisit un adhérent au hasard et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque adhérent sa cotisation.

1. Quelles sont les différentes valeurs prises par X et dans quels cas ?
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. En déduire la probabilité qu'un adhérent pratique au moins l'un des deux sports.

Exercice 3 : Ce tableau présente la loi de probabilité P associée à une variable aléatoire X.

X	-2	0	3	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{14}$	a	$\frac{1}{7}$	b	$\frac{1}{14}$

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer a et b sachant que les événements $X = a$ et $X = b$ sont équiprobables.
3. Calculer $P(X \leq 4)$.
4. Imaginer un jeu dont les probabilités de gain seraient données par le tableau ci-dessus.

Exercice 4 : Fabrice, le petit frère de Norbert, veut faire une blague à Norbert. Il lui a acheté 4 bonbons sans lui dire les parfums. Il y en a 1 à la menthe (M), 1 à la fraise (P), et 2 au kumiss (K).
Le Kumiss est une boisson Kirghize, à base de lait de jument fermentée.
Norbert les a mis dans son sac et compte chaque jour, en mangé un, pioché au hasard, cependant :

- ⇝ S'il tombe sur un bonbon au kumiss dès le premier jour, il n'en mange pas d'autres, pensant qu'ils sont tous au même parfum
- ⇝ Sinon, il continue d'en manger tant qu'il n'a pas mangé le deuxième bonbon au kumiss.

Fabrice s'intéresse évidemment à l'ordre dans lequels seront mangés les bonbons.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre.
2. Combien y a-t-il d'issues ?
3. Quelle est la probabilité que Fabrice mange un bonbon au kumiss le premier jour ?
4. Fabrice se demande si Norbert mangera les deux bonbons au kumiss ou non. Il appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de bonbons au kumiss mangés par Norbert. Donner la loi de probabilité de X.
5. Fabrice s'intéresse aussi évidemment au jour où Norbert mangera son premier bonbon au kumiss. On appelle Y la variable aléatoire qui donne ce jour.
Donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 5 : On tire avec remise deux cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'as obtenus. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 6 : La finale d'un master de tennis oppose Roger et Raphaël. Le premier qui gagne deux sets remporte le prix. On considère que Roger a deux fois plus de change de gagner un set.

1. Quelle est la probabilité p que Roger gagne un set ?
2. Donner une représentation de la situation.
3. On définit par X la variable aléatoire donnant le nombre de sets disputées pour déterminer le vainqueur du master.
Donner la loi de X.

Exercice 7 : Pendant ses vacances d'été, Norbert aide sa mère à entraîner 30 yaks au saut d'obstacles dans la boue. Un yak n'est admis en compétition nationale que s'il est capable d'exécuter le parcours en moins de 5 minutes.
Un tiers des yaks sont entraînés par Norbert, 20% par son frère Fabrice et le reste par leur mère Laurence. Laurence amène les $5/7^e$ des ses yaks à la compétition, Norbert réussit pour 50% de ses yaks, tandis que Fabrice y parvient pour 40%.
On choisit un yak au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

- L : « Le yak est entraîné par Laurence »
- F : « Le yak est entraîné par Fabrice »
- N : « Le yak est entraîné par Norbert »
- C : « Le yak est capable de participer à la compétition nationale »

1. Donner une représentation de la situation
2. Calculer $p(\mathrm{L})$
3. Déterminer $p(\overline{\mathrm{L}} \cap \mathrm{C})$ et $p(\overline{\mathrm{L}} \cap \overline{\mathrm{C}})$
4. Un yak qui est capable de participer à la compétition est vendu ensuite 5 000€ sur le marché européen, tandis que les autres sont cédés à 3 000€.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le prix d'un yak de cette famille sur le marché européen. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 8 : On lance n dés ($n \geq 1$). Le jeu consiste à miser 2€, puis si on obtient au moins un 6, on remporte 3€.

1. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 »
   - **a.** Décrire $\overline{\mathrm{A}}$ en français puis exprimer en fonction de n la probabilité $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$.
   - **b.** En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ en fonction de n.
   - **c.** Compléter le tableau suivant :

Nombres de dés n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(\mathrm{A})$								

   - **d.** Combien de dés faut-il pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{2}{3}$?
2. On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X en fonction de n.
   - **b.** Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ en fonction de n.
     Combien de dés faut-il pour que le jeu soit favorable au joueur ? Est-on surpris ?
   - **c.** Calculer $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ puis $\sigma(\mathrm{X})$ dans ce cas. Interpréter.

Exercice 9 : (Challenge)
Combien y a-t-il de « couples » de délégués possibles dans de votre classe ?