**Travail de l'élève 1** : Dans le pays des merveilles d'Alice, le lapin blanc, depuis le temps, a fait des enfants (enfin des adolescents plutôt...). Du plus vieux au plus jeune : le lapin bleu, le lapin rouge, le lapin vert et le lapin noir. A l'adolescence chacun des 4 lapins a réclamé de l'argent de poche. Noter que les lapins du pays des merveilles sont adolescents de 0 à 4 ans, ils deviennent enfants par la suite et n'ont jamais été adultes.
Le lapin blanc a décidé de donner au lapin bleu dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

— 3 carottes la première semaine ;

— Chaque semaine deux carottes de plus que la semaine précédente.

*On admet qu'au pays des merveilles chaque année est constituée d'exactement* 52 *semaines et chaque mois de* 4 *semaines.*
On note $u_0 = 3$ et $u_n$ le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour où il fête ses $n$ semaines.

1. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ ; calculer $u_1$ ; $u_2$ et $u_3$. Combien de carottes le lapin bleu a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant $u_n$ en fonction de $n$. Vérifier cette formule en recalculant $u_1$ ; $u_2$ et $u_3$.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   **a.** A partir de quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
   **b.** Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin bleu au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{207} = \sum_{i=0}^{i=207} u_i$$
   **c.** Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin bleu (fort économe) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin bleu.
   **d.** Grand amateur de montre, le lapin bleu décide de troquer ses carottes contre des montres au cours suivant, 1 montre contre 540 carottes. Déterminer le nombre de montres que le lapin bleu a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

**Travail de l'élève 2** : Vient le tour du derrnier né du lapin blanc, le lapin noir. Détestant les habitudes le lapin blanc modifie une nouvelle fois le système des « carottes de poches » et le lapin noir se voit proposer le système suivant :

— 3 carottes la première semaine ;

— Chaque semaine $3,5\%$ de carottes en plus de la semaine précédente (le lapin blanc donnera s'il le faut des morceaux de carottes…)

On note $t$ la suite telle que $t_n$ vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $t_1 = 3$ et que $t_0$ n'existe pas.

1. Calculer $t_1$ ; $t_2$ et $t_3$ puis exprimer $t_{n+1}$ en fonction de $t_n$. Combien de carottes le lapin noir a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant $t_n$ en fonction de $n$. Vérifier cette formule en recalculant $t_1$ ; $t_2$ et $t_3$.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin noir le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   **a.** A partir de quel âge le lapin noir peut-il se nourrir à satiété ?
   **b.** Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin noir au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$\mathrm{S} = t_1 + t_2 + \cdots + t_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} t_i$$
   **c.** Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin noir (comme les autres) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin noir.
   **d.** Par rapport au lapin précédent, le cours de la carotte a encore augmenté de 10%. Déterminer le nombre de montres que le lapin noir a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

**Exercice du Cours** :

1. Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ est géométrique
2. La suite $(v_n)$ est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On note
   $$w_n = v_n + 2$$
   Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique.

**Exercice du Cours** : Montrer que la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$ est géométrique. On précisera sa raison.