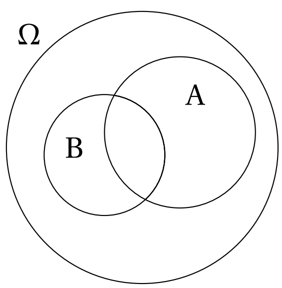
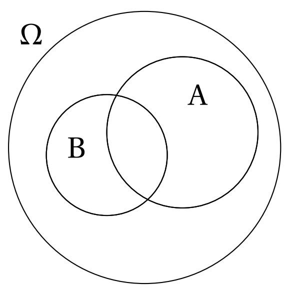
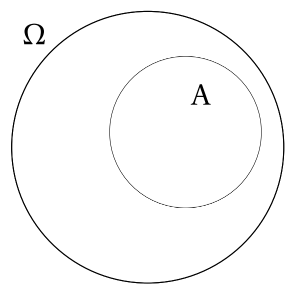
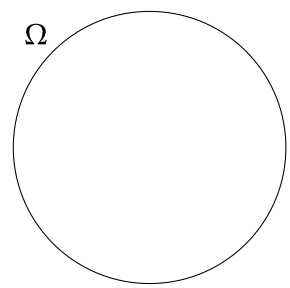
I.2. Ce que vous savez déjà

<u>Travail de l'élève 1</u> : On dispose de deux urnes. Dans la première notée U_1, il y a 5 boules Rouges et 3 boules Noires. Dans la seconde notée U_2, il y a 4 Rouges et 6 Noires.
On choisit au hasard une urne, puis on pioche une boule dedans. On s'intéresse à la couleur obtenue.

1. Modéliser l'expérience à l'aide d'un arbre.
2. On considère les événements suivants : U_1 : « Choisir l'urne U_1 » R : « Obtenir une boule Rouge »
   Définir en français les événements suivants, puis déterminer leur probabilité :

   a. $U_1 \cap R$ **b.** R **c.** $\overline{R}$ **d.** $U_1 \cup R$ **e.** $U_1 \cap \overline{U_1}$ **f.** $U_1 \cup \overline{U_1}$

$A \cap B$	$A \cup B$	$\overline{A}$	$A \cap B = \emptyset$
			

Travail de l'élève 2 : L'éducation coûte trop cher. Afin de réaliser des économies, le gouvernement syldave a décidé de se passer à la fois de correcteurs et d'élèves. Tout est géré dans les bureaux du ministère, en simulant sur odinateur le lancé d'un dé pour chaque élève virtuel, le but étant d'obtenir une moyenne nationale satisfaisante à présenter aux investisseurs étrangers qui se rueront en Syldavie pour profiter d'une main d'œuvre aussi qualifiée.

1. **a.** Préciser l'univers Ω de cette expérience.

   b. Déterminer la probabilité p de l'événement A : « Obtenir un nombre impair »

2. On convient que lorsque le candidat virtuel jette un dé virtuel : s'il sort un 6, il a 20, s'il tombe sur un autre numéro pair il a 14, s'il tombe sur un numéro impair, il a 5.
   On désigne par X le procédé qui, selon la simulation, associe à chaque face la note d'un élève.

   a. Compléter $X(6) = \dots$, $X(4) = \dots$, $X(5) = \dots$.
   Quel « objet mathématique » reconnaissez-vous dans X ?

   b. Quel est l'univers, noté $X(\Omega)$, de cette nouvelle expérience aléatoire ?

   c. On note $(X = 5)$ l'événement « L'élève obtient la note 5 »
   Quel lien existe-t-il entre A et $(X = 5)$? En déduire $P(X = 5)$.

   d. On note x_i les différentes valeurs prises par X.
   Compléter le tableau suivant :

x_i	5			Total
$P(X = x_i)$				

   Doit-on s'étonner du résultat de la case Total ?

3. **a.** Quelle moyenne nationale peut espérer obtenir le ministre ?

   b. Cette moyenne nationale est-elle une moyenne ?

   c. Cette moyenne nationale sera-t-elle effectivement atteinte ?

Exemple :

Les derniers syldaves fonctionnaires touchant un salaire pour leur travail coûtent encore trop cher à l'état. Un nouveau système de rémunération en neurones a été mis au point :
Le fonctionnaire doit chaque mois verser un impôt de 1 000 neurones à l'état puis il lance un dé. S'il sort un 6, il touche 3 000 neurones. Dans les autres cas, l'état ne lui verse rien.
On appelle X la variable aléatoire sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui, à chaque issue associe le gain (positif ou négatif) en neurones d'un fonctionnaire. On a :

$$X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = -1000 \qquad \text{et} \qquad X(6) = 2000$$

Dresser le tableau de la loi de probabilité du gain X.

Exemple :

A Groland, le système de rémunération des salariés et des actionnaires est le même qu'en Syldavie, mais en moustiques. De plus, le premier ne demande pas de mise initial, et le second donne systématiquement une prime de 500000 moustiques.

1. Exprimer les variables aléatoires Y_S et Y_A donnant respectivement le salaire des salariés et des actionnaires à Groland.
2. En déduire $E(Y_S)$, $\sigma(Y_S)$, $E(Y_A)$ et $\sigma(Y_A)$.
3. Interpréter.

Travail de l'élève 3 : On reprend le contexte de l'activité précédente et on donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

```
Variables
    Dé, i, N sont des nombres entiers
    Effectif est une liste à deux éléments
Début
    Saisir N
    Effectif[1] et Effectif[2] prennent la valeur 0
    Pour i allant de 1 à N Faire
        Affecter à Dé un entier aléatoire entre 1 et 6
        Si (Dé == 6) Alors
            Affecter à Effectif[1] la valeur Effectif[1]+1
        Sinon
            Affecter à Effectif[2] la valeur Effectif[2]+1
        Fin Si
    Fin Pour
    Afficher Effectif[1]
Fin
```

1. Programmer cet algorithme sur Algobox et le tester.
2. Que fait-il ?
   On précisera ce que représente chacune des variables)
3. Modifer ce programme pour qu'il simule l'attribution des notes en Syldavie et qu'il renvoit les effectifs de chaque note. Le tester.
4. Modifier votre dernier programme pour qu'il renvoit la moyenne nationale obtenue.
5. Effectuer un simulation pour 10 élèves, puis 100 puis 1 000.
   Que constatez-vous ?

Exemples :

1. Dans l'exemple précédent du salaire des fonctionnaires en Syldavie, calculer $E(X)$.
2. Les entreprises privées décident de payer leurs salariés selon le même modèle, mais elles proposent 6 000 neuronnes à la place de 3 000 (avec la même mise initiale).
   Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_S correspondante et calculer $E(X_S)$.
3. Les banques se calquent aussi sur ce modèle mais elles utilisent un dé à 100 faces, une mise initiale de 1 million de neurones et un gain éventuel de 1 milliard de neurones.
   Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_A correspondante et calculer $E(X_A)$.
4. Interpréter et critiquer l'ensemble de vos résultats.

Travail de l'élève 4 : On reprend l'activité sur les notes d'élèves de Syldavie.
Pour rentrer à l'université de Springfield, ils sont mis en compétition avec les élèves de Groland.
Cette université privilégie les élèves du pays au meilleur résultat moyen espéré et à leur régularité.
A Groland également, on a décidé de tirer les résultats du baccalauréat aux dés. Voici la règle : Lorsqu'on obtient 6 au dé, l'élève a 20. Un autre nombre pair fournit un 7 à l'élève. Ensuite s'il sort 1, l'élève a 5, s'il sort 3, l'élève a 10 et enfin, s'il sort 5, l'élève a 14.

1. Calculer la moyenne nationale que peut espérer obtenir Groland.
2. De quels moyens dispose-t-on pour comparer la régularité de chacun des pays ?

Travail de l'élève 5 : A Groland, le système de rémunération des fonctionnaires est le même que celui de Syldavie, mais la monnaie est le moustique, dont le taux est de 4 moustiques pour 1 neurone. De plus, un salarié doit verser un impôt supplémentaire de 1000 moustiques au départ.

1. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y donnant le gain d'un fonctionnaire en moustiques.
2. Exprimer la variable aléatoire Y en fonction de la variable X de l'exemple précédent.
3. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
4. Sans calculer $E(Y)$, démontrer que $E(Y) = 4E(X) - 1000$. En déduire $E(Y)$
5. Sans calculer $E(Y)$, démontrer que $V(Y) = 16E(X)$, sans calculer $V(Y)$. En déduire $V(Y)$.

Casio 35+, 65 et 85

Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire et leurs probabilités :

- Par $\boxed{\text{Menu}}$, choisir le menu `STAT` et valider par $\boxed{\text{EXE}}$
- Entrer les valeurs prises par la variable aléatoire dans la liste List 1, et les probabilités dans la liste List 2.
  On se déplace dans le tableau grâce aux flèches.

Afficher les indicateurs des listes :

- Sur le même écran, choisir `CALC` par la touche $\boxed{\text{F2}}$ située en dessous.
- Choisir `SET` par $\boxed{\text{F6}}$ pour définir les listes concernées.
  Vérifier que vous avez :
  - `XList : List1`
  - `Freq : List2`
- Valider par $\boxed{\text{EXE}}$.
- Choisir `1 VAR` par $\boxed{\text{F1}}$ pour obtenir les indicateurs.
  La flèche $\boxed{\blacktriangledown}$ permet d'afficher la suite des indicateurs.

Effacer les listes :

- Dans le menu `STAT`, sélectionner un élément de la liste à effacer.
- Puis choisir `DEL-A` par les touches $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{\text{F4}}$
- Valider par $\boxed{\text{EXE}}$

Dans les quatre cas, la calculatrice affiche dans l'ordre :

- $\overline{x}$: la moyenne pondérée
- $\sum x$: la somme pondérée des valeurs, ie $\sum x_i p_i$ (ici c'est la même chose que $\overline{x}$)
- $\sum x^2$: la somme pondérée des carrés des valeurs, ie $\sum x_i^2 p_i$ (utile pour le calcul de la variance)
- Sx : sans valeur quand les coefficients sont des probabilités)
- σx : l'écart-type
- n : l'effectif, ie $\sum p_i$ (donc ici $n = 1$)
- minX : la plus petite valeur prise par X
- Q_1 : le premier quartile
- Med : la médiane
- Q_3 : le troisième quartile
- maxX : la plus grande valeur de X

Exemple :

Le « président » de Syldavie pense que les filles de son pays sont trop intelligentes et risquent de renverser son pouvoir, pourtant bien établi depuis 30 ans.
Pour limiter le nombre de filles en Syldavie il décide que chaque famille aura au moins un enfant et arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon, dans un maximum de 4 enfants par famille.
On considère que chaque enfant autant de chances d'être un garçon qu'une fille, indépendamment du sexe d'éventuel(s) enfant(s) précédent(s).
On se demande si ce choix a la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population.

1. On présente l'algorithme suivant :

Algorithme 2 :

Variables
X, NbeEnfants, NbeFilles sont des nombres entiers

Début
$n = 0$, X = 0
Tant que (X == 0 et NbeEnfants< 4) **Faire**
Affecter à X un entier aléatoire entre 0 et 1
$n = n + 1$
Fin Tant que
Si (X == 1) **Alors**
NbeFilles= $n - 1$
Afficher « La famille a eu », NbeFilles , « fille(s) et 1 garçon »
Sinon
La famille a eu 4 filles et 0 garçon
Fin Si

Fin

   a. Que fait-il ?
   b. Modifier cet algorithme pour qu'il simule les naissances dans N familles quelconque en Syldavie et qu'il renvoit le nombre de garçons et le nombre de filles.
   c. Programmer votre algorithme sur Scilab.
   d. Conjecturer une réponse au problème posé.

2. Le « président » de Syldavie appelle S (pour Succès) et E (pour Echec) les événements suivants :
   S : « La famille a un garçon » et E : « La famille n'a pas de garçon »
   a. Schématiser la situation par un arbre.
   b. On appelle X la variable aléatoire égale à k si le premier Succès est rencontré au $k^{ième}$ enfant, et à 0 si aucun Succès n'a été obtenu.
   Déterminer la loi de X.
   c. Répondre au problème posé.

Exemple :

Le jeu du lièvre et de la tortue

Le jeu consiste à affronter un lièvre et une tortue pour parcourir un plateau de 6 cases, selon les règles suivantes :

– On lance un dé équilibré à 6 faces,

– Si le 6 sort, le lièvre avance directement de 6 cases (et donc gagne) ;

– Sinon, la tortue avance d'une case.

– Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

On appelle p la probabilité de gagner du lièvre.

1. Conjectures :

   a. Conjecturer la situation la plus enviable, celle du lièvre ou de la tortue ?

   b. Conjecturer la valeur de p.

2. Simulation :

   a. Simuler ce jeu sur Algobox, avec en affichage la fréquence de gain du lièvre.
   On commencera par demander à l'utilisateur le nombre de parties qu'il souhaite faire.

   b. Les résultats de la simulation pour 50 expériences vous semblent-ils en accord avec votre conjecture ? Pour 100 ? 10 000 ?

3. Modélisation :

   a. Schématiser la situation à l'aide d'un arbre.

   b. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers de dés qu'il a fallu au lièvre pour gagner et égale à 0 si le lièvre a perdu.
   Déterminer $P(X = 0)$ puis l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k, pour $1 \leq k \leq 6$.

   c. En déduire p.

   d. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exemple : Le paradoxe de Saint Pétersbourg

Un joueur joue contre la banque au jeu de « pile ou face », en misant toujours sur face. Il adopte la stratégie suivante : il mise un euro au premier coup, et s'il perd, double la mise au coup suivant, tant que face ne sort pas. S'il gagne, il récupère sa mise augmentée d'une somme équivalente à cette mise. Le joueur dispose d'une fortune limitée, qui lui permet de perdre au maximum n coups consécutifs et, si pile sort n fois de suite, le joueur ne peut plus miser et arrête le jeu. La fortune de la banque, elle, n'est pas limitée. Une partie consiste pour le joueur à jouer, si sa fortune le lui permet, jusqu'à ce que face sorte. Il s'agit de déterminer la probabilité qu'a le joueur de gagner une partie, son gain algébrique moyen par partie, et d'analyser l'intérêt pour le joueur de jouer à ce jeu, par rapport à la banque.

1. Déterminer la mise du joueur s'il gagne au $3^{ième}$ coup, puis au $10^{ième}$, puis au $k^{ième}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2. On envisage le cas où le joueur dispose d'une fortune de 1 000€.

   a. Sa fortune lui permet de tenir n. Déterminer n grâce à un tableau de valeurs.

   b. Simulation

      i. Sur tableur, reproduire la feuille de calculs ci-après, qui simule 1 000 parties en 9 coups.
      On a codé la sortie de Face par 1 et celle de Pile par 0 et on à utiliser notamment les formules suivantes :

      – `=ALEA.ENTRE.BORNES(0,1)`

– `=SI(OU(A2=1;A2="");"";ALEA.ENTRE.BORNES(0,1))`
– `=SI(SOMME(A2:I2)=0;"Tortue";"Lièvre")`
– `=NB.SI(K2:K1001;"Tortue")`
– `=NB.SI(A2:I2;0)+NB.SI(A2:I2;1)`

ii. Puis tracer l'histoire correspondant à la plage L6 : M14. Cela vous parait-il cohérent ?

iii. Discuter l'intérêt de ce jeu.

c. Modélisation : on appelle X la variable aléatoire qui comptabilise le rang de la première face, et l'on convient que ce rang est égal à 0 si face ne sort pas et on appelle Y la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

i. Déterminer $P(X=0)$ puis l'expression de $P(X=k)$ en fonction de k, pour $1 \leq k \leq n$.

ii. Déterminer les valeurs possibles de Y

iii. Déterminer la loi de Y.

iv. Calculer E(Y).

v. Conclure en terme de gain moyen et de risque.

d. Désormais on considère que la banque joue n et on reprend les notations précédentes.

i. Calculer $P(X=0)$ et en déduire la probabilité de gagner pour la banque.

ii. De quoi se rapproche celle valeur quand n est très grand ?

iii. Conclure.

B2 | `=SI(OU(A2=1;A2="");"";ALEA.ENTRE.BORNES(0;1))`

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Lancé 1	Lancé 2	Lancé 3	Lancé 4	Lancé 5	Lancé 6	Lancé 7	Lancé 8	Lancé 9	Nbe Lancers	Vainqueur	Nombre de parties perdues		
2	1									1	Lièvre		2	
3	0	1								2	Lièvre			
4	0	1								2	Lièvre			
5	1									1	Lièvre	Nombre de parties gagnées en :		
6	1									1	Lièvre	1	516	
7	0	0	1							3	Lièvre	2	218	
8	0	1								2	Lièvre	3	134	
9	0	0	1							3	Lièvre	4	66	
10	0	1								2	Lièvre	5	43	
11	0	0	1							3	Lièvre	6	7	
12	0	0	1							3	Lièvre	7	9	
13	0	1								2	Lièvre	8	4	
14	1									1	Lièvre	9	1	
15	1									1	Lièvre	Somme :	998	
16	0	1								2	Lièvre			
17	0	1								2	Lièvre			
18	1									1	Lièvre			
19	1									1	Lièvre			
20	1													
21	0	0	0	0	1									
22	1													
23	1													
24	1													
25	0	1												
26	1													
27	0	0	0	1										
28	1													
29	0	0	0	0	0									
30	1													
31	1													
32	0	1												
33	0	0	1											
34	1													
35	1													
36	0	0	1											
37	1													
38	1													
39	0	0	0	0	1									
40	1									1	Lièvre			
41	1									1	Lièvre