∽ TP - SPÉ TS ∽
DÉTECTIONS D'ERREURS

Exercice 1. **Les codes barres**

Les codes-barres sont omniprésents dans la vie courante. Ils trouvent leurs applications dans des domaines aussi variés que la gestion des prêts d'une bibliothèque, les caisses enregistreuses à lecture optique ou le contrôle de la production dans l'industrie. Les chiffres inscrits sur code-barre permettent d'identifier un produit. Le code EAN-13 (European Article Numbering). est composé de 13 chiffres.

- les deux premiers chiffres correspondent au pays de provenance du produit ou à une classe normalisée de produits ;
- les quatre chiffres suivants correspondent au codage du fabriquant ;
- les six suivants forment le numéro d'article ;
- le treizième chiffre est une **chiffre de contrôle ou clé** et est calculé sur le 12 chiffres précédents :

Un code-barres est symbolisé par le tableau suivant :

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	C

où a_1, a_2, ..., a_{12} et C sont les 13 chiffres constituant le code-barres ; C est donc la clé.
Si on note

$$S = 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

, le clé C est le chiffre tel que $S + C$ soit divisible par 10

1. Vérifier que le code suivant est un code-barre valide :

   4971850187820

2. Déterminer la clef de contrôle du code d'identification suivant :

   978204732850

3. Déterminer le chiffre manquant du code

   3252x37041767

4. Dans les trois cas précédents, calculer le reste r de la division euclidienne de S par 10. Vérifier que la clé est égale à $10 - r$ dans deux cas. Que constatez-vous dans l'autre cas ?

5. Généralisation de ce constat :
   (a) Quelles sont les valeurs possibles d'un reste r dans une division euclidienne par 10 ?
   (b) Pour quelle valeur de r, la clef ne peut-elle pas être égale à $10 - r$? Quelle est la clé dans ce cas ?
   (c) Démontrer que lorsque le reste est non nul, l'entier $10 - r$ est une clé qui convient.
   (d) Démontrer que la clé correspondant à une séquence a_1, a_2,...,a_{12} donnée est unique.
   (e) Conclure

6. L'algorithme suivant a été écrit pour calculer la clé. Qu'en pensez-vous ?

Algorithme 1 :

Données: a_i est un chiffre de 0 à 9 pour i de 1 à 12
A,B,S,R,C sont des entiers naturels
Début Algorithme
A := somme des termes de rang impair
B := somme des termes de rang pair
S := A + 3B somme des termes de rang impair
R := reste de la division de S par 10.
C := 10 − R somme des termes de rang impair
Afficher C
Fin Algorithme

7. Détection d'erreur :
   (a) On suppose qu'une seule erreur a été commise en rentrant un code-barre dans une base de donnée et qu'elle porte sur un chiffre de rang impair (par exemple a_1).
   Notons b_1 le chiffre qui lui a été substitué.
   Notons S le calcul de la somme utilisée pour le calcul de la clé avec le bon code et S' le calcul avec le code erroné.
      i. Donner un encadrement de la différence $a_1 - b_1$.
      ii. En supposant que la même clef ait été rentrée, montrer que la différence $S - S'$ doit être un multiple de 10.
      iii. Confronter les deux premières questions.
      iv. Une seule erreur commise sur un chiffre de rang impair sera-t-elle détectée ?
   (b) Étudier, de même, le cas d'une erreur unique sur un chiffre de rang pair (b_2 à la place de a_2)
   (c) On suppose maintenant que deux chiffres consécutifs ont été permutés (par exemple a_1 et a_2).
      i. Vérifier que
      $$S' = S + 2(a_1 - a_2)$$
      ii. En déduire que l'erreur est non détectée si et seulement si 5 divise $a_1 - a_2$
      iii. En déduire un exemple d'erreurs non détectées.

Exercice 2. Le relevé d'identité bancaire (RIB) est formé :
- d'un nombre de 21 chiffres :
  - cinq chiffres identifiant la banque,
  - cinq chiffres identifiant le guichet et,
  - onze chiffres représentant le numéro du compte.
- suivi d'un nombre de 2 chiffres qui est une clé de détection d'erreur dans l'un des 21 précédents.

La clé est définie ainsi :
On note A le nombre constitué des 21 chiffres on calcule le reste r de la division euclidienne de 100A par 97 ; la clé K est alors définie par $K = 97 - r$.
Soit $A = 200410101278340238431$

1. Ecrire 100A sous la forme $a \times 10^{12} + b \times 10^6 + c$ avec $0 \le c < 10^6$ et dire combien de chiffres comporte 100A.
2. Identifier a, b et c.
3. Calculer le reste de la division euclidienne de 10^6 par 97 puis de 10^{12} par 97.
4. Calculer la clé du nombre A.