R.O.C : Restitution Organisée des Connaissances

Terminale S
Extrait d'annales

Table des matières

I. Analyse **2**
I.1. Suites 2
I.2. Exponentielle 5

II. Probabilités **8**
II.1. Probabilités discrètes 8

I. Analyse

I.1. Suites

Proposition 1 :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
- u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Prérequis : une suite tend vers $+\infty$ *si, pour tout réel* A*, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à* A

Solutions **:**

Soit A un réel, puisque u_n tend vers $+\infty$ alors d'après le prérequis à partir d'un certain rang, que l'on va noter n_0, u_n est supérieur à A c'est-à-dire :

$$u_n > \mathrm{A} \qquad \forall n \geq n_0$$

De plus, on sait qu'à partir d'un certain rang, que l'on va noter n_1 on a :

$$u_n \leq v_n$$

Par conséquent pour tout entier naturel n supérieur à n_0 et à n_1 on a :

$$v_n \geq u_n > \mathrm{A}$$

On vient de démontrer que pour tout réel A, tous les termes de la suite (v_n) sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ce qui signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Proposition 2 :

On suppose connu pour la démonstration de cette proposition le résultat suivant :
Prérequis : Si (v_n) et (w_n) sont deux suites telles que à partir d'un certain rang on a :

$$v_n \leq w_n$$

et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$$

1. **Lemme de Bernoulli** : Démontrer, par récurrence, que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier n on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. En déduire que si $u_n = q^n$ avec $q > 1$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solutions :

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie
   $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
   Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
   On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$
   On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1+nx \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

   Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

2. Posons $x = q-1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

   La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

Proposition 3 :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« *une suite tend vers* $+\infty$ *si, pour tout réel* A, *tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à* A ».
Démontrer le théoréme suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Preuve

Soit A un réel, puisque (u_n) est une suite non majorée alors il existe un certain entier, disons n_0 tel que :

$$u_{n_0} \geq \mathrm{A}$$

Puisque (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$u_n \geq u_{n_0} \geq \mathrm{A}$$

ainsi pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang n_0, supérieurs à A ce qui, par définition, nous permet de conclure que (u_n) tend vers $+\infty$

I.2. Exponentielle

Proposition 4 :

L'objet de cette exercice est de démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

Considérons une fonction f vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

1. Soit la fonction c définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $c(x) = f(-x)f(x)$.
   (a) Montrer que $c'(x) = 0$, en déduire que $c(x) = 1$ pour tout réel x.
   (b) En déduire que f ne s'annule jamais.
2. Soit g une autre fonction vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$.
   (a) On pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. Montrer que $h'(x) = 0$.
   (b) En déduire que $h(x) = 1$
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(x)$ puis conclure.

Preuve

1. (a) On a donc $(f(-x))' = -f'(-x) = -f(-x)$ et $f'(x) = f(x)$ ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$c'(x) = \left(f(-x)\right)' f(x) + f(-x)f'(x) = -f(-x)f(x) + f(-x)f(x) = 0$$

   On en déduit que c est une fonction constante. De plus : $c(0) = f(-0)f(0) = 1 \times 1 = 1$ par conséquent pour tout réel x on a :

$$c(x) = 1$$

   (b) S'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $c(x_0) = f(-x_0)f(x_0) = f(-x_0) \times 0 = 0$ ce qui est impossible puisque on sait que $c(x) = 1$ pour tout réel x, par conséquent il n'existe aucun réel x tel que $f(x) = 0$ i.e f ne s'annule jamais.

2. (a) Pour tout réel x on a :

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} = 0$$

   (b) Puisque $h'(x) = 0$ pour tout réel x h est une fonction constante, de plus pour $x = 0$ on a :

$$h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

   Par conséquent pour tout réel x on a :

$$h(x) = 1$$

   (c) Pour tout réel x on a $h(x) = 1$ ce qui équivaut à :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Longleftrightarrow g(x) = f(x)$$

   On vient de démontrer que deux fonctions égales à leurs dérivée sur $\mathbb{R}$ et qui valent 1 en 0 sont identiques, ce qui prouve qu'une telle fonction si elle existe est unique.

Proposition 5 :

L'objet de cette exercice est de démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = e^x - x$.
   Démontrer que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
2. En déduire que $e^x \geq x$
3. Conclure.

Preuve

1. Pour tout $x \geq 0$ on a :
   $$g'(x) = e^x - 1$$
   Or, $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff e^x \geq e^0 \iff x \geq 0$.
   Par conséquent pour tout $x \geq 0$ on a $g'(x) \geq 0$, ce qui prouve que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Puisque g est strictement croissante on a :
   $$x \geq 0 \Longrightarrow g(x) \geq g(0) \Longrightarrow e^x - x \geq e^0 - 0 \Longrightarrow e^x - x \geq 1 \Longrightarrow e^x - x \geq 0$$
3. D'après la question précédente on a, pour tout $x \geq 0$:
   $$e^x - x \geq 0 \iff e^x \geq x$$
4. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on a par comparaison :
   $$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Proposition 6 :

Prérequis : On suppose connu le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

En posant $\mathrm{X} = -x$ et en utilisant le prérequis démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Preuve

$e^{\mathrm{X}} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} e^{\mathrm{X}} = 0$

Proposition 7 :

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
On suppose connu les résultats suivants :

–
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad e^x \geq x$$

– Si $\phi(x) \geq \psi(x)$ à partir d'un certain réel x et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. (On étudiera la fonction g pour cela).
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Preuve

1. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a :
   $$g'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x$$
   De plus puisque $e^x \geq x$ on a $e^x - x \geq 0 \Longleftrightarrow g'(x) \geq 0$.
   Ainsi la fonction g est strictement croissante et donc pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$:
   $$g(x) \geq g(0) = 1 \geq 0$$
2. $$g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$
   Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on en déduit par comparaison (deuxième prérequis) que :
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

II. Probabilités

II.1. Probabilités discrètes

Proposition 8 :

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

1. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.
2. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

Preuve

1. On a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, et il s'agit d'une réunion disjointe, par conséquent :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

2. Comme A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Par conséquent, en utilisant 1.

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$$

ce qui prouve que B et $\overline{A}$ sont indépendants.