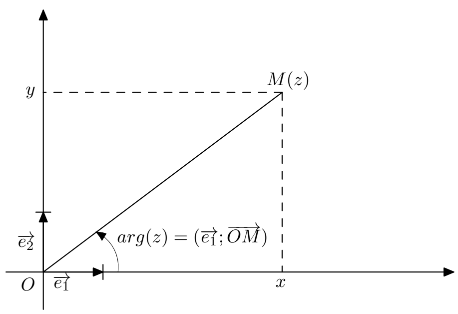
Les nombres complexes.
Fiche Résumé

Théorème 1. (Forme Algébrique)

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ où $i^2 = -1$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. a est appelé partie réelle de z et b est appelé partie imaginaire de z.

On considère deux nombres comlexes $z \neq 0$, $z' \neq 0$ de forme algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$, et $n \in \mathbb{Z}$. Soient $\mathrm{A}(z_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(z_\mathrm{B})$, $\mathrm{C}(z_\mathrm{C})$ et $\mathrm{D}(z_\mathrm{D})$ quatre points, distincts deux à deux, du plan complexe, muni d'un repère orthonormé.



Remarque : On note que $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z| = \mathrm{OM}$

Propriété 1.

1. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
3. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
4. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. $|z + z'| < |z| + |z'|$ car $z \neq 0$ et $z' \neq 0$

Propriété 2.

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$
3. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$
4. $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
6. $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad [2\pi]$

Théorème 2.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans $\mathbb{C}$:

– Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

$z = x + iy$ est la forme algébrique de z.

$$\left\{\begin{array}{l} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ tel que } \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{array}\right.$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z et enfin :

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{est sa forme exponentielle}$$

Calculs avec les affixes

Soit I le milieu de [AB]. Alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A \qquad z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$AB = |z_B - z_A| \qquad \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \qquad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi]$$

Alignement et droites parallèles

$$\text{Les points A, B et C sont alignés} \iff \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0\,[\pi] \iff \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}$$

$$(AB)//(CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\,[\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$(AB) \perp (CD) \iff \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

Ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ ***tels que :***

$\lvert z - z_\mathrm{A} \rvert = k$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{AM} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	:	Si $k > 0$: Cercle $\mathscr{C}(\mathrm{A}, k)$ Si $k = 0$: Point A Si $k < 0$: Ensemble vide
$\lvert z - z_\mathrm{A} \rvert = \lvert z - z_\mathrm{B} \rvert$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$	:	Médiatrice de [AB]
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = 0 \quad [\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [\pi]$	:	Droite (AB) privée de A et B
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = 0 \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = 0 \quad [2\pi]$	:	Droite (AB) privée du segment [AB]
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = \pi \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \pi \quad [2\pi]$	:	Segment [AB]
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$	:	Cercle de diamètre [AB] privé des points A et B
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	:	Demi-cercle de diamètre [AB] privé des points A et B tel que MAB soit rectangle direct.
$\arg\left(\dfrac{z - z_\mathrm{B}}{z - z_\mathrm{A}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad , [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	:	Demi-cercle de diamètre [AB] privé des points A et B tel que MAB soit rectangle indirect.
$\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$	$\Longleftrightarrow$	$x_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} x_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} y_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}} = 0$	:	Cercle de diamètre [AB]

Remarque : Un angle orienté n'est défini que si les deux vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés le cas échéant, des ensembles ci-dessus.