Chapitre 3

Limites de fonctions

Hors Sujet

Titre : « M le maudit »
Auteur : Fritz Lang
Présentation succinte de l'auteur : Il s'agit du premier film parlant de Fritz Lang. Avec le temps, M le maudit est devenu un classique reconnu, rivalisant avec les autres œuvres de Lang pour le titre d'opus magnum. Pendant des années après la sortie du film, Peter Lorre est resté catalogué comme un méchant pour y avoir été un meurtrier d'enfant (et, c'est sous-entendu, un pédophile). M le maudit a été aussi un pionnier dans l'utilisation du leitmotiv (Dans l'antre du roi de la montagne, extrait de Peer Gynt d'Edvard Grieg) pour donner plus d'intensité à l'accompagnement musical.

La ville où se déroule l'action n'est pas nommée, et on pourrait croire qu'il s'agit de Düsseldorf, d'après les titres en italien et espagnol M, le monstre de Düsseldorf. Pourtant, Fritz Lang décide de faire se dérouler le film à Berlin. Plusieurs indices dans le film permettent au spectateur de comprendre qu'ils sont à Berlin : une publicité pour un journal berlinois, la carte de Berlin dans le bureau du commissaire, le fait que le commissaire parle d'une ville de 4 millions d'habitants...

Claude Beylie décrit « M » comme « [...] un magistral exercice de style, un modèle absolu de mise en scène, considérée comme une mise en équation de tous les éléments constitutifs du film. Le moindre détail est chargé de sens, les plans s'imbriquent selon un ordre infaillible. »

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- $\rightsquigarrow$ Maîtriser les opérations sur les limites.
- $\rightsquigarrow$ Déterminer des limites par comparaison.
- $\rightsquigarrow$ Interpréter graphiquement les limites obtenues.

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 3

Limites de fonctions

Résumé

Ce chapitre étend simplement la notion de limite étudiée pour les suites. Il s'agit d'une bonne occasion pour réviser et revoir les méthodes employées.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I. Définitions

I.1. Limite infinie d'une fonction en l'infini

Exercice 1. On considère une suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n^2+1}{n-2}$$

1. Déterminer la limite de la suite u.
2. (a) On note f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$. Etudier les variations de f.
   (b) En déduire qu'à partir de $n = 5$ la suite u est strictement croissante.
   (c) La suite u est-elle majorée ?
3. On considère un réel A strictement positif.
   Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$ on ait $f(x) > \mathrm{A}$.
   La fonction f est-elle majorée ?

Définition 1.

Comme pour les suites, lorsque (quelque soit $\mathrm{A} > 0$) toutes les images $f(x) \in]\mathrm{A}; +\infty[$ à partir d'un certain réel x_0 signifie que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

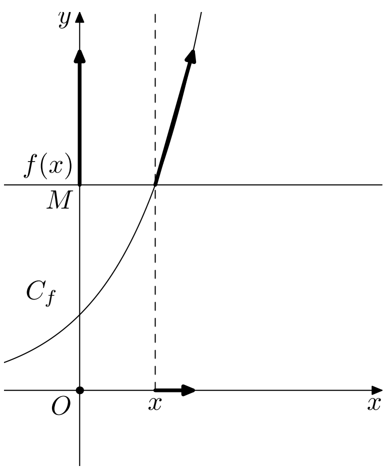
De la même manière :

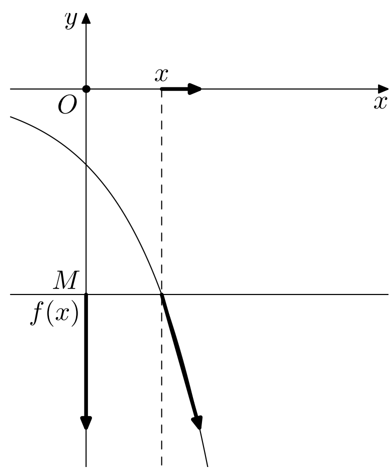
Définition 2.

Une fonction f **tend vers** : $-\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Illustrations :





__Exercice__ **2.** Proposer un exemple de fonction polynôme de degré 2 dont la limite en $+\infty$ est $-\infty$.
Proposer un exemple de fonction rationnelle dont la limite en $+\infty$ est $-\infty$.

Remarques :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$, peut être rendu aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand, ie :

$$\forall A, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x > x_0, \quad f(x) > A$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $f(x)$, peut être rendu aussi grand que l'on veut « dans les négatifs »dès que x est assez grand, ie :

$$\forall A, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x > x_0, \quad f(x) < A$$

- Les définitions de limite quand x tend vers $-\infty$ sont analogues aux précédentes, avec x « assez grand dans les négatifs »

__Exercice__ **3.**

1. Proposer un exemple de fonction polynôme de degré 2 dont la limite en $-\infty$ est $-\infty$.
2. Proposer un exemple de fonction polynôme de degré 2 dont la limite en $-\infty$ est $+\infty$.
3. Proposer un exemple de fonction rationnelle dont la limite en $-\infty$ est $+\infty$.
4. Proposer un exemple de fonction rationnelle dont la limite en $-\infty$ est $-\infty$.

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, ie montrons que si $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ alors il existe une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$ on a $f(x) > \mathrm{A}$.
Pour cela, considérons $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ et trouvons un tel x_0 (cela montrera donc qu'il en existe un).

Remarquons déjà que si $\mathrm{A} < 0$, on peut choisir n'importe quelle valeur pour x_0 car $f(x) > \mathrm{A}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ce cas est souvent omis, car toujours trivial.
Si $\mathrm{A} \geq 0$, on a $f(x) > \mathrm{A} \Longleftrightarrow x^2 > \mathrm{A} \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x > \sqrt{\mathrm{A}}$
Ne considérer que le cas $x > 0$ suffit, car x tend vers $+\infty$
Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = \sqrt{\mathrm{A}} > 0$, et on a bien que $\forall x > x_0, \quad f(x) > \mathrm{A}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

On a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ car $\forall x \in \mathbb{R}^-$, on a $f(x) > \mathrm{A} \Longleftrightarrow x^2 > \mathrm{A} \overset{x<0}{\Longleftrightarrow} x < -\sqrt{\mathrm{A}}$.
Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = -\sqrt{\mathrm{A}} < 0$, et on a bien que $\forall x < x_0, \quad f(x) > \mathrm{A}$

Exemple :

Déterminer les limites éventuelles de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

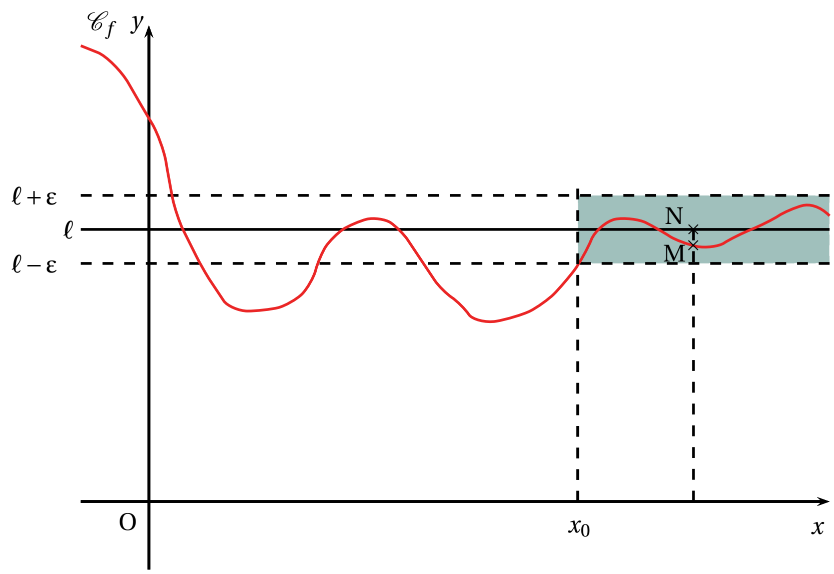
I.2. Limite finie d'une fonction en l'infini

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et un réel ℓ.
On dit que f **admet pour limite ℓ (ou tend vers ℓ) quand x tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote hoizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Remarques :

- Cela signifie que la distance entre $f(x)$ et ℓ, ie $|f(x)-\ell| = \mathrm{MN}$, peut être rendue aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x > x_0, \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon \iff \lim_{x\to+\infty} |f(x)-\ell| = 0$$

- Graphiquement, la courbe représentative se rapproche autant que l'on veut de la droite d'équation $y = \ell$.
- On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, et l'asymptote horizontale en $-\infty$, avec $-x$ assez grand, ou encore x « assez grand dans les négatifs » :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x < x_0, \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon \iff \lim_{x\to-\infty} |f(x)-\ell| = 0$$

Exemple :

La fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La droite d'équation $y = 0$, i.e l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Lorsque $x \to +\infty$ le nombre $\dfrac{1}{x} \to 0$ tout en restant strictement positif, on note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$. A l'inverse lorsque $x \to -\infty$ le nombre $\dfrac{1}{x} \to 0$ tout en restant strictement négatif, on note de manière analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$

Exercice 4. Proposer plusieurs fonctions qui admettent des limites finies en $+\infty$ ou en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

> ***En pratique :***
> - $\rightsquigarrow$ On conjecture la valeur de ℓ à la calculatrice
> - $\rightsquigarrow$ On écrit $|f(x) - \ell|$ sans valeur absolue, en fonction de x
> - $\rightsquigarrow$ On pose $\varepsilon > 0$ et on résout l'inéquation $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
> - $\rightsquigarrow$ On conclut.

Exemple :

Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ie montrons que si $\varepsilon > 0$ alors il existe une valeur x_0 telle que pour tout $x > x_0$ on a $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Pour cela, considérons $\varepsilon > 0$ et trouvons tel un réel x_0 (cela montrera donc qu'il en existe un).
Remarquons déjà que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) - 0 = \dfrac{1}{x} > 0$. Donc $|f(x) - 0| = \dfrac{1}{x}$.
Ne considérer que le car $x > 0$ suffit car x tend vers $+\infty$
Ainsi :

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \overset{x>0}{\iff} \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc, il suffit de choisir $x_0 = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, et on a bien que $\forall x > x_0, \quad |f(x) - 0| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On a de même $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^{-*}$, on a $f(x) - 0 = \dfrac{1}{x} < 0$. Donc $|f(x) - 0| = -\dfrac{1}{x}$ et :

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \overset{x<0}{\iff} -\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Ainsi, il suffit de choisir $x_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon} < 0$, et on a bien que $\forall x < x_0, \quad |f(x) - 0| < \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et en $-\infty$.

I.3. Limite en un réel a

Définition 4.

Une fonction f **tend vers** :

- **un réel ℓ quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

- **$+\infty$ quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]\lambda;+\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

- **$-\infty$ quand x tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]-\infty;\lambda[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

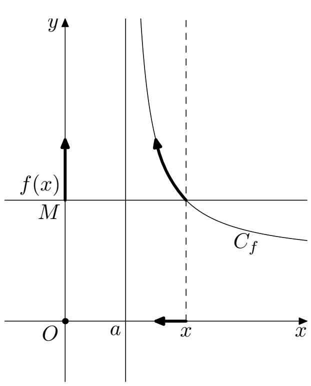
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Dans tous les cas, on définit la limite de f en a **à droite** (respectivement **à gauche**) de manière analogue, en considérant x assez proche de a mais restant strictement supérieur à a (respectivement inférieur).
On note :

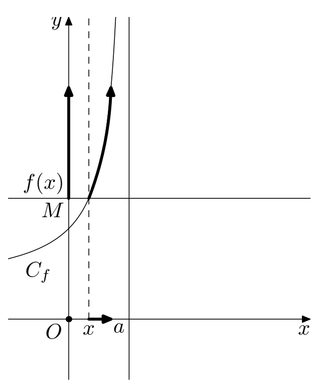
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Illustrations :

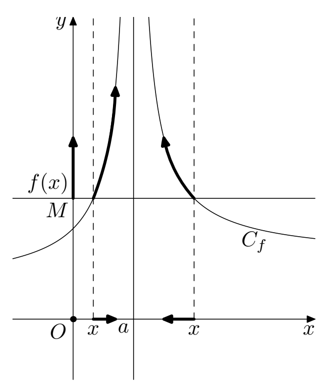
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$



Définition 5.

Lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un réel a (ou en a à droite, ou en a à gauche), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

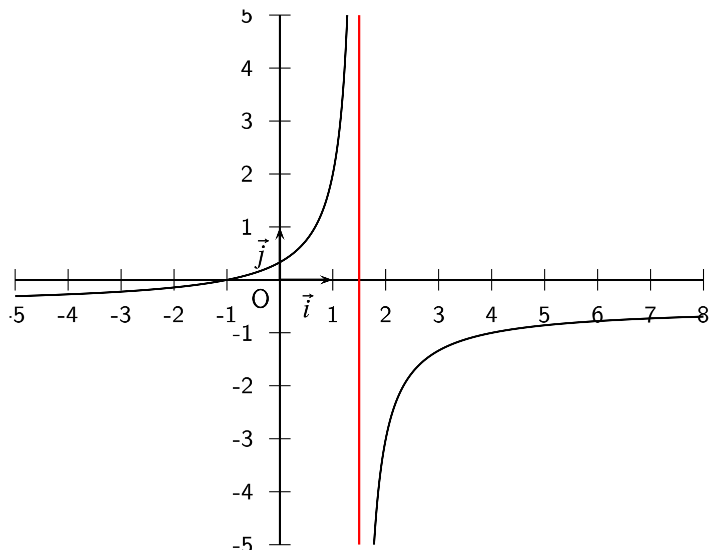
Exercice 5. Donner, sans justification, plusieurs exemples de fonction admettant en un réel a une asymptote verticale.

Exemple :

Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x) = \frac{1+x}{3-2x}$.
On ne sait pas encore le montrer rigoureusement, mais on peut tout de même conjecturer que

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}^-} g(x) = +\infty$$

La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe représentative de g.



Remarques :

- La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.
- Ecrire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ avec $a \in \mathrm{D}_f$ et $\ell \in \mathbb{R}$ sous-entend $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$
- Vous commencez à vous habituer à ces définitions, mais leur usage reste compliqué. Rassurez-vous, vous ne serez pas toujours obligés d'y revenir pour calculer des limites. Il existe des théorèmes analogues à ceux sur les suites, bien plus manipulables.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, donner une allure possible de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

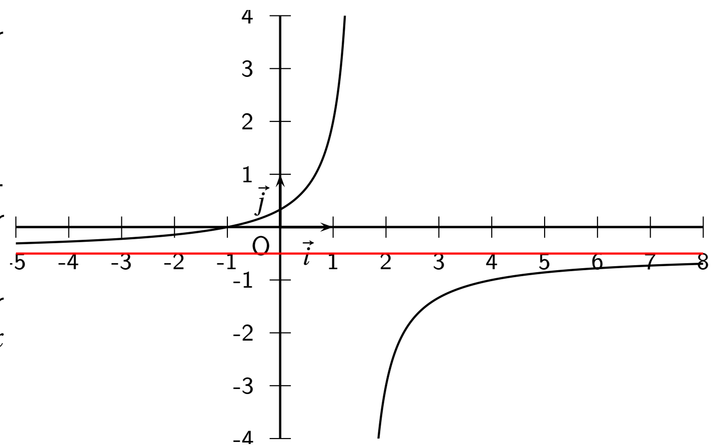
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et enfin la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

II. Déterminer une limite

II.1. Limites et opérations

Travail de l'élève : Soit g définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par $g(x)=\dfrac{1+x}{3-2x}$.

1. Retrouver les limites de g en $\pm\infty$ en supposant que toutes les propriétés des limites sur les suites sont valables pour les fonctions.
2. Toujours en utilisant ces règles, déterminer les limites à droite et à gauche de g quand x tend vers $\frac{3}{2}$.



Solutions :

1. $g(x)=\dfrac{1+x}{3-2x}=\dfrac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(\frac{3}{x}-2\right)}=\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{3}{x}-2}$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-2=-2$. Par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\frac{1}{2}$

   De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+1=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}-2=-2$. Par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\frac{1}{2}$

2. On a $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}1+x=\frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}3-2x=0^-$. Ainsi, par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}g(x)=-\infty$.

   Comme $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}3-2x=0^+$. Ainsi, par quotient on obtient $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}g(x)=+\infty$.

Conclusion

Les résultats sur les calculs de limites pour les suites restent valables pour les limites de fonctions.

Propriété 1. (Quelques limites à connaître)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Remarque : Les courbes représentatives de chacune sont un bon moyen pour retenir les limites.

Propriété 2. (Opérations sur les limites)

Les règles d'opérations sur les limites pour les suites restent valables pour les fonctions, qu'il s'agisse de limite en l'infini ou en un réel. Rappelons tout de même les quatre formes indéterminées :

$$« \ 0\times\infty \ » \qquad « \ \frac{0}{0} \ » \qquad « \ \frac{\infty}{\infty} \ » \qquad « \ \infty-\infty \ »$$

Remarque : Lorsque l'on a une forme indéterminée, l'idée est de changer l'écriture de l'expression en factorisant ou en développant, suivant l'écriture initiale.

Exemples :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3+x}{2-x}$ en $+\infty$, $-\infty$, en -3 et en 2.
2. $h : x \longmapsto \dfrac{3+x}{(2-x)^2}$ en $+\infty$, $-\infty$, en -3 et en 2.
3. $k : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ en -3, en -2 et en 1.

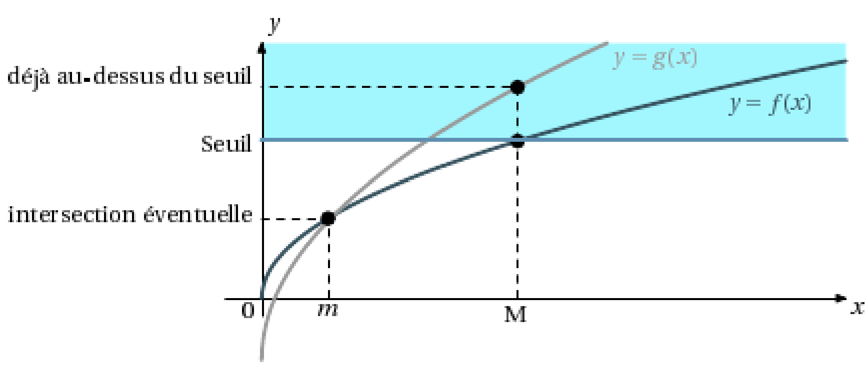
II.2. Limites et comparaison

On dispose de théorèmes analogues à ceux déjà vus sur les suites.

Théorème 1. (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle du type $]a;+\infty[$, telles que pour tout $x > a$ on a $f(x) \leq g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Preuve

- Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ il existe un réel x_0 tel que $f(x) > A$ à partir de x_0.
  Par conséquent pour $x > max(x_0; a)$ $A < f(x) \leq g(x)$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- Soit $A \in \mathbb{R}$.
  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ il existe un réel x_0 tel que $g(x) < A$ à partir de x_0.
  Par conséquent pour $x > max(x_0; a)$ $f(x) \leq g(x) < A$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

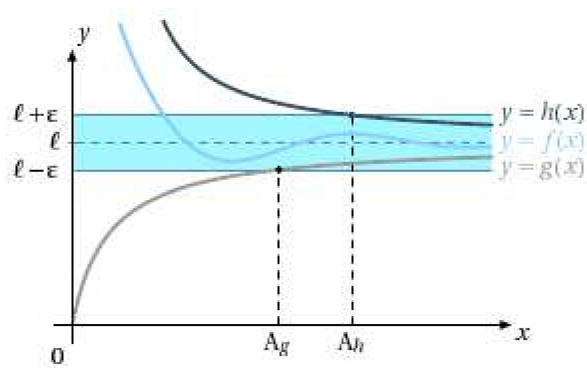
Théorème 2. (Théorème des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle du type $]a; +\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$ telles que :

1. pour tout $x > a$ on a $g(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$

Alors f admet pour limite ℓ en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$



Preuve

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Il s'agit de démontrer que I contient tous les réels $f(x)$ à partir d'un certain x_0.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, i.e qu'il existe x_1 tel que $g(x) \in I$ à partir de x_1 et il existe un réel x_2 tel que $h(x) \in I$ à partir de x_2.
Soit $x_0 = max(a, x_1; x_2)$. Si $x > x_0$, l'intervalle I contient $g(x)$ et $h(x)$, donc il contient aussi tous les réels compris entre $g(x)$ et $h(x)$, en particulier il contient $f(x)$, ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2+3\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 7.

1. Montrer que pour tout réel x on a :
$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$$
2. En déduire les limites suivantes :

(a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$$

(b)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$$

II.3. Composée de deux fonctions

Pour décrire une fonction, on peut parfois la décomposer en enchaînements de fonctions plus simples. Par exemple, pouvez-vous décomposer la fonction $\Phi : x \mapsto \sqrt{-3x+1}$ en deux fonctions élémentaires ?
Supposons que vous vouliez étudier la limite de ϕ en $-\infty$. Que pourriez vous faire ?

Définition 6.

Soient deux fonctions f et g définies sur deux ensembles I et J tels que l'image de J par g est contenue dans I : $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$.
La fonction obtenue en appliquant successivement g puis f, s'appelle la composée de g par f et est notée $f \circ g$.
Ainsi, pour tout réel $x \in \mathrm{J}$ on a $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

Théorème 3. (admis)

Soient deux fonctions f et g, et a, b, ℓ des nombres réels, ou éventuellement $+\infty$, ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to b} f(\mathrm{X}) = \ell$, alors :
$$\lim_{x\to a} f \circ g(x) = \ell$$

Preuve **Hors Programme**

Raisonnons dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$ Soit I un intervalle ouvert qui contient ℓ.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, I contient tous les réels $f(x)$ pour x strictement inférieur à un certain x_0.
De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, l'intervalle ouvert $]-\infty; x_0[$ contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur à un certain réel x_1.
Si $x > x_1$, on a alors $g(x) < x_0$, et donc $f(g(x)) \in \mathrm{I}$ i.e $f \circ g(x) \in \mathrm{I}$
Ainsi tout intervalle ouvert I qui contient ℓ contient aussi tous les réels $f \circ g(x)$ pour x assez grand ; ce qui signifie que
$$\lim_{x\to+\infty} f \circ g(x) = \ell$$

Remarque : Ce théorème reste identique si $v_n = f(u_n)$.

Exemples :

1. Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 5$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+1}{x+1}}$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\dfrac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$
Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Solutions :

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to 0} \sin(X) + 5 = 0 + 5 = 5$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$

2. Pour $x > 0$, on a $f(x) = \sqrt{X}$ avec $X = \dfrac{4x+1}{x+1}$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{x+1} = \frac{4x}{x} = 4$ (*fonction rationnelle en* $+\infty$) et $\displaystyle\lim_{X\to 4} \sqrt{X} = 2$ donc :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} f(X) = 2$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}$

Exercice 8. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dresser, en justifian, les tableaux de variations des fonctions $-f$, $|f|$, f^2 et $\dfrac{1}{f}$, en précisant les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2+x}$

1. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de f en 0, et en $+\infty$, ainsi que ses variations.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
En donner une interprétation graphique.
3. (a) Calculer $f'(x)$.
(b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
(c) En déduire le tableau complet des variations de f.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x on a $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$
En déduire la limite de f en $+\infty$.