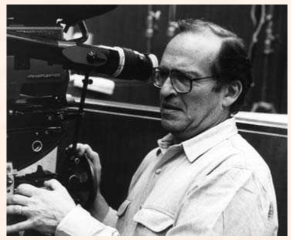
Chapitre 5

Continuité et dérivabilité



Hors Sujet

Titre : « 12 hommes en colère »
Auteur : Sydney Lumet
Présentation succinte de l'auteur : Un adolescent est accusé du meurtre de son père. Comme il risque la peine capitale, la loi américaine exige l'unanimité du jury pour que cette sentence soit prononcée. Au premier tour de délibération, un seul juré sur douze vote "non coupable". Cet homme, un architecte symboliquement vêtu de blanc, est un juste. Par son éloquence et la rigueur de sa démonstration, il va persuader chacun des autres jurés, l'un après l'autre, que l'accusation présente des failles et qu'on ne peut que déclarer l'accusé innocent.
Pour son premier film, adapté d'une dramatique télévisuelle de Reginald Rose, Sidney Lumet réussit magistralement à éviter la pesanteur du "théâtre filmé". Tout au contraire, le suspense se maintient de bout en bout, et l'action ne cesse de rebondir. L'architecte, brillamment interprété par Henry Fonda, doit convaincre les onze jurés l'un après l'autre. Ce système des "dix petits nègres" permet une montée en puissance de l'action, une fois déclenché le compte à rebours de l'innocence. La partie s'avère difficile, puisque Fonda est seul pour disculper l'accusé. Mais, grâce à la mise en scène de Sidney Lumet, à ses mouvements de caméra, à la virtuosité des dialogues et à la diversité des types humains réunis dans le jury, le suspense devient exaltant.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- $\leadsto$ Maîtriser le théorème des valeurs intermédiaires.
- $\leadsto$ Etudier le signe d'une expression.
- $\leadsto$ Etudier une fonction (dérivée, tableau de signe, courbe, etc...).

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 5

Continuité et dérivabilité

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques (XVII$^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

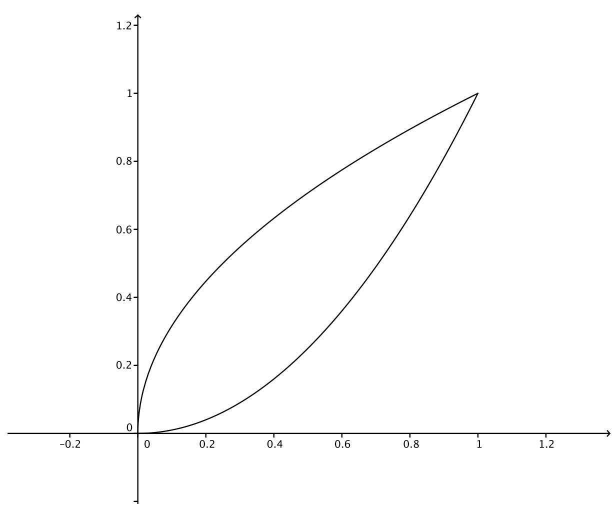
I. Continuité d'une fonction

I.1. Fonction continue en un point

I.1.a. Définition

On sait déjà calculer l'aire de polygone, mais qu'en est-il de figure dont les côtés ne sont pas des segments ?

Exercice 1. On cherche l'aire $\mathscr{A}$ de la figure délimitée, sur l'intervalle $[0;1]$, par les courbes des fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$.



1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a
$$0 \leq x^2 \leq x \leq 1$$
puis que
$$0 \leq x \leq \sqrt{x} \leq 1$$
En déduire que :
$$0 \leq x^2 \leq \sqrt{x} \leq 1$$
2. Montrer que $0 \leq \mathscr{A} \leq 1$.

3 (a) Expliquer l'algorithme suivant et en déduire $\mathscr{A}$:

```
import math
import random

n = 10000000
compteur=0
for i in range(n):
    x = random.uniform(0,1)
    y = random.uniform(0,1)
    if y>x**2 and y<x**0.5:
        compteur+=1
proba=compteur/n

print(proba)
```

```
Python 3.3.2 Shell
>>>
>>> ================================ RESTART ==================
>>>
0.3332167
>>>
```

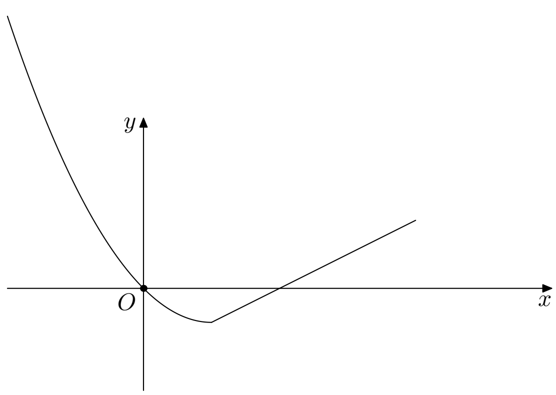
3 (b) Que doit-on modifier dans l'algorithme précédent si l'on souhaite déterminer l'aire $\mathscr{B}$ de la figure délimitée, sur l'intervalle $[0;1]$, par les courbes des fonctions $f : x \longmapsto x^4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Nous apprendrons à déterminer l'aire de tel solide, obtenue à partir de fonction continue et dérivable sans recours aux probabilités.
Pour cela on s'assurera d'une part que la figure est obtenue à l'aide de fonctions continues (c'est-à-dire que la figure est fermée) et d'autre part on déterminera la valeur de la pente à tout point de la bordure du solide (c'est-à-dire on déterminera la dérivée).
Avant de pouvoir calculer de telles aires, définissons la continuité...

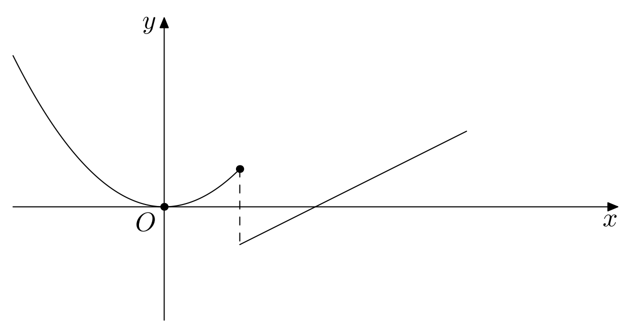
Définition 1.

Soit I un intervalle et f une fonction définie au moins sur I, a un réel de I.
On dit que f est continue en a lorsque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Illustration :



On peut tracer la courbe de f sans lever le crayon. Elle ne présente pas de « saut », f est continue en tout point.



On ne peut pas tracer $\mathscr{C}_f$ sans lever le crayon, f présente une discontinuité en un point ; on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Remarque : La condition $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ peut aussi s'écrire $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

I.1.b. Un contre-exemple : la fonction partie entière

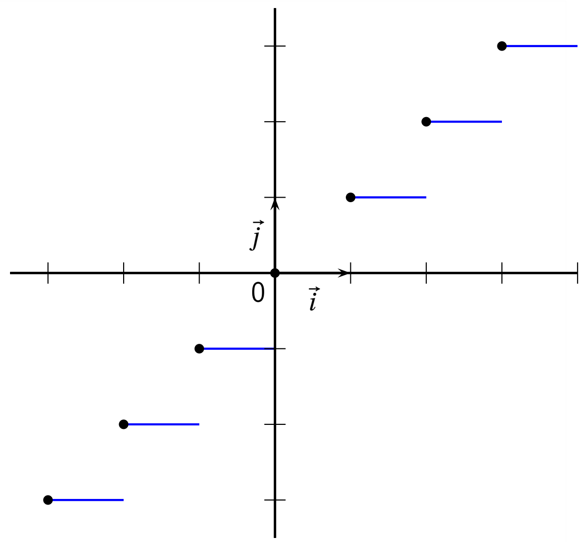
Notons E la fonction qui à un réel x associe sa partie entière :

$$\mathrm{E}(x) = \text{le plus grand entier inférieur ou égal à } x$$

Autrement dit, $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier tel que :

$$\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$$

Par exemple $\mathrm{E}(\pi) = 3$, $\mathrm{E}(-\pi) = -4$ [1]
Ci-dessous nous avons tracé $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$.



Cette fonction admet des discontinuités en tout entier, en effet on a :

$$\lim_{x \to 2^+} \mathrm{E}(x) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^-} \mathrm{E}(x) = 1$$

Les limites à droite et à gauche étant différente, la fonction partie entière n'admet pas de limite en 2, elle est donc discontinue en 2.

I.1.c. Autre cas de fonction non continue

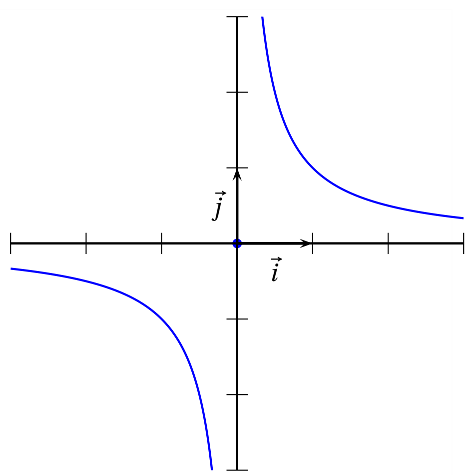
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue en 0, en effet :

$$f(0) = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Autrement dit f n'admet pas de limite en 0.



1. On remarquera que la fonction partie entière des mathématiciens n'est pas impaire contrairement à celle des informaticiens qui considère que $\mathrm{E}(-\pi) = -3$

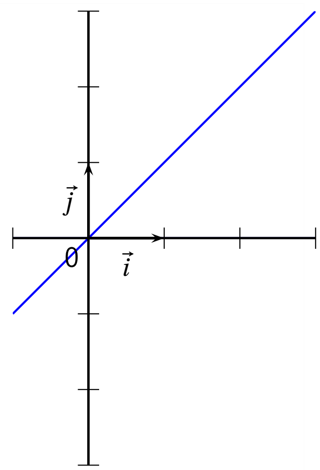
Attention !

Il ne faut pas confondre cette fonction avec la fonction inverse qui est continue en tout point de son ensemble de définition !

Remarque : On dit souvent qu'une fonction continue est représentée par un trait continu (obtenu sans relâcher le crayon). Il faut rester méfiant par rapport à cette interprétation, car il existe en mathématiques des fonctions « monstres » comme :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En apparence on pourrait croire que cette courbe se trace sans lever le crayon et pourtant la fonction présente une infinité de discontinuité.



I.2. Fonction continue sur un intervalle

I.2.a. Définition

Définition 2.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I
La fonction f est continue sur I si elle est continue en a, pour tout $a \in \mathrm{I}$

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Démontrer cette propriété est assez ardu, car la définition de la continuité et donc de celle des limites n'est pas d'un usage aisé. Nous admettrons donc la continuité de nombreuses fonctions usuelles.

I.2.b. Continuité des fonctions usuelles

Théorème 1.

Admis

Les fonctions polynômes, la fonction racine carrée, la fonction valeur absolue, les fonctions sin et cos sont continues la où elles sont définies

Théorème 2.

Admis

Soit f, g deux fonctions continue sur un intervalle I et λ un réel. Alors :

- $f+g$ est une fonction continue sur I
- fg est une fonction continue sur I
- λf est une fonction continue sur I
- Si de plus g est une fonction non nulle sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I
- Si g est continue sur un intervalle contenant $f(\mathrm{I})$ alors $f\circ g$ est continue sur I

Corollaire 1.

Toutes fonctions rationnelles à coefficients réels est continue sur son ensemble de définition.

Exemple :

- On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+x-2x^2$. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f:x\mapsto |u(x)|,\quad g:x\mapsto \frac{1}{u(x)} \text{ et } \quad h:x\mapsto \sqrt{u(x)}$$

- Soit A un réel fixé et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ \mathrm{A} & \text{sinon.}\end{cases}$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{x^2+1}$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

I.2.c. Limite d'une suite et d'une fonction continue

Théorème 3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit (u_n) une suite de réels de I qui converge vers $\ell\in\mathrm{I}$.
Alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$, autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$$

Preuve

Comme f est continue en ℓ, on a :

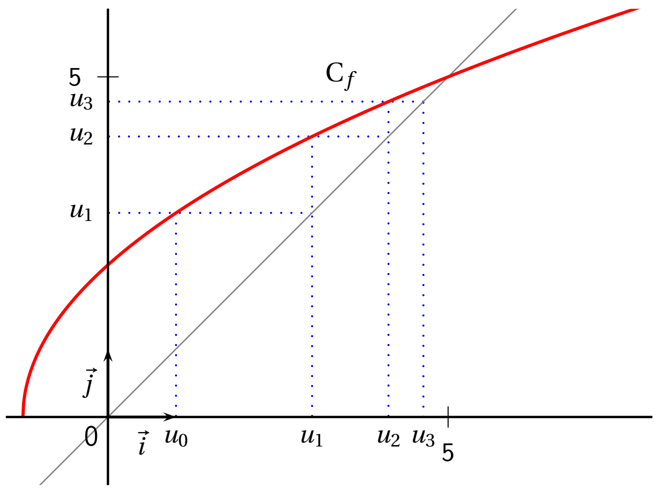
$$\lim_{x\to\ell} f(x) = f(l)$$

Considérons un intervalle ouvert J centré autour de $f(l)$, il existe un intervalle ouvert L centré autour de ℓ tel que $f(x) \in J$ pour tout $x \in L$

Comme (u_n) converge vers ℓ, à partir d'un certain rang n_0 on aura $u_n \in L$ et donc $f(u_n) \in J$

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} \end{cases}$$



1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 5.
3. En déduire que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
4. Montrer que $f(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ.

I.3. Applications : Théorème des valeurs intermédiaires

I.3.a. TVI

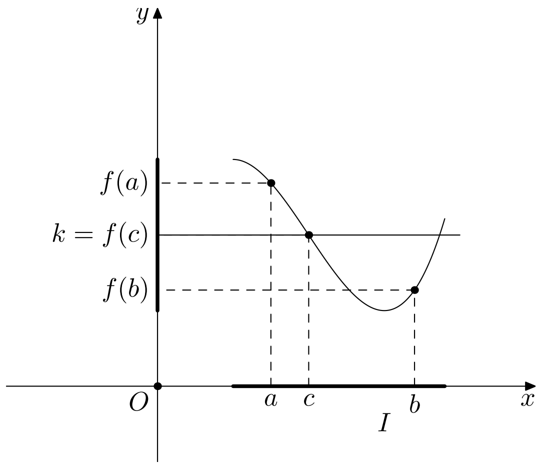
Théorème 4.

valeurs intermédiaires

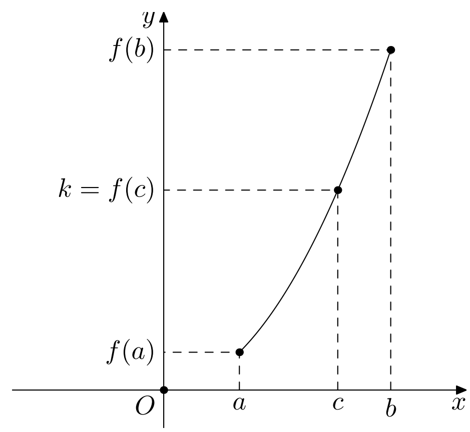
Soit I un intervalle, a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur I, soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$

Illustration :

Cas d'une fonction non monotone :



Cas d'une fonction monotone :



Preuve

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et k un nombre réel tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$ (le cas $f(b) \leq k \leq f(a)$ se traite exactement de la même manière).
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Si $f\left(\frac{1}{2}(a_0+b_0)\right) \leq k$, on prend $a_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$ et $b_1 = b_0$
  sinon, on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$.
- On réitère le même processus pour construire tous les termes de la suite i.e si $f\left(\frac{1}{2}(a_n+b_n)\right) \leq k$ on prend $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon on prend $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$$
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante, puis que la suite (b_n) est décroissante.
   En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. On note ℓ la limite commune des suites (a_n) et (b_n)
   (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$
   (b) Conclure.

Remarques :

- L'hypothèse de continuité est essentielle, essayer d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction partie entière avec $a = 0$, $b = 1$ et $k = \frac{1}{2}$!
- Le TVI permet d'affirmer l'existence de solution(s) mais ne permet pas de les trouver ! En général, on en cherche une approximation par balayage à la calculatrice ou par dichotomie

Exercice 4. Démontrer que l'équation $2\cos x = x - 1$ admet un moins une solution dans $\mathbb{R}$

Application :

Toute fonction polynôme P de degré impair admet au moins une racine réelle.

Preuve

Dans le cas où le coefficient devant le monôme de plus haut degré est positif (l'autre cas est identique) on a :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$$

donc il existe $a \in \mathbb{R}^-$ tel que $P(x) < 0$, $\forall x \leq a$ et

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$$

donc il existe $b \in \mathbb{R}^+$ tel que $P(x) > 0$, $\forall x \geq b$
P est une fonction polynôme donc P est continue sur $[a; b]$ avec $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$

I.3.b. Théorème du point fixe

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on note $f(\mathrm{I})$ l'ensemble de toutes les images des réels appartenant à I

Exemple :

L'image de $[-1; 2]$ par la fonction carré est l'intervalle $[0; 4]$

Théorème 5.

Point Fixe

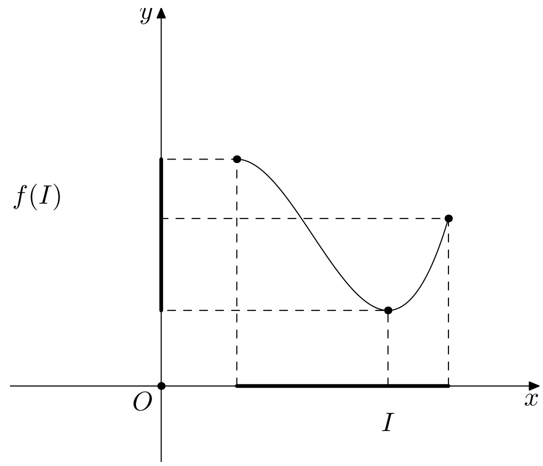
Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$.
Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ alors f admet au moins un point fixe i.e il existe $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = x$

Preuve

Considérons la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$.
Montrons que $0 \in g(\mathrm{I})$. On a $g(a) = f(a) - a \in g(\mathrm{I})$ et $g(b) = f(b) - b \in g(\mathrm{I})$.
Comme $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ alors $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$ i.e $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiares il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $g(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = c$

Corollaire 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.



Preuve

Soit y_1 et y_2 dans $f(\mathrm{I})$ tel que $y_1 \leq y_2$.
Il s'agit de montrer que tout réel k compris entre y_1 et y_2 est dans $f(\mathrm{I})$. Soit k un tel réel.
Comme y_1 et y_2 sont dans $f(\mathrm{I})$, il existe a et b tels que $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$.
Comme I est un intervalle on a $[a;b] \subset \mathrm{I}$ et f est donc continue sur $[a;b]$, par conséquent d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $f(c) = k$. Par conséquent $k \in f(\mathrm{I})$ et donc $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Contre-Exemple :

L'image de l'intervalle $[-1;2]$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\{-1;0;1;2\}$ et cet ensemble n'est pas un intervalle.

Exemple :

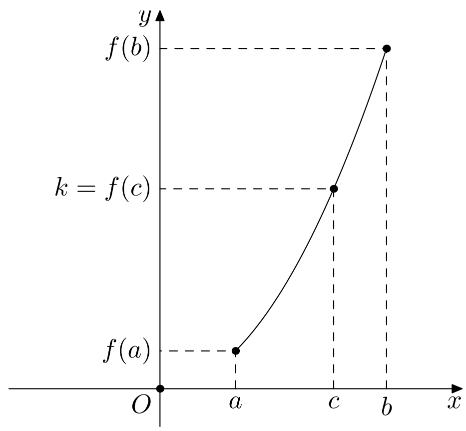
L'image de l'intervalle $[-5;2]$ par la fonction carré est l'intervalle $[0;25]$. Le résultat précédent nous assure qu'il s'agit bien d'un intervalle.

I.3.c. TVI pour une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

Théorème 6.

Bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors :
il existe un unique c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$



Remarque : En ajoutant l'hypothèse de la monotonie, on récupère l'unicité de l'antécédent de k.

Preuve

- L'existence est assuré par le théorème des valeurs intermédiaires.
- L'unicité découle donc de la stricte monotonie de la fonction f. On sait qu'il un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.
  Considérons le cas où f est une fonction strictement croissante sur $[a;b]$, alors pour tout $x < c$ on a $f(x) < f(c)$ et pour tout $x > c$ on a $f(x) > f(c) = k$, autrement dit pour tout $x \neq c$ de l'intervalle $[a;b]$ on a $f(x) \neq f(c)$, par conséquent c est unique.

Exercice 5. Démontrer que l'équation $\sqrt{x} = \dfrac{5}{x-2}$ admet une unique solution réelle α ; puis encadrer α entre deux entiers consécutifs

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$, dénombrer les solutions des équations suivantes :

1. $f(x) = -1$
2. $f(x) = -5$

Exercice 7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1+x)^3 + x$$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$ à 10^{-1} près

I.4. Applications : Notion de fonctions réciproques

Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Notons $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$, J est encore un intervalle et de plus pour tout $y \in \mathrm{J}$ il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que

$$f(x) = y$$

On peut alors définir une nouvelle fonction g de J dans I définie par $g(y) = x$. La situation peut-être schématisée comme suit :

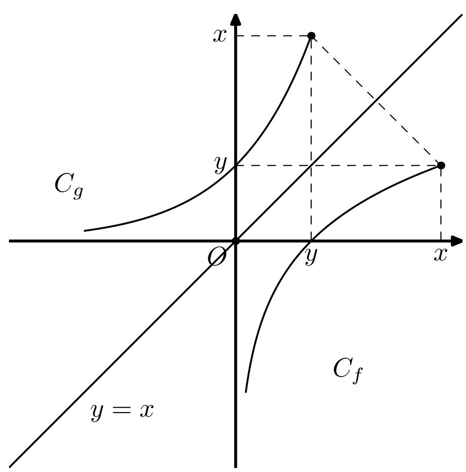
$$\begin{tikzcd} g(y)=x \arrow[r, bend left, "f"] & y=f(x) \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Il est alors clair que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(f(x)) = x$, autrement dit $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{I}}$ et pour tout $y \in \mathrm{J}$, $f(g(y)) = y$ i.e $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{J}}$.

Définition 4.

On dit que la fonction g est la fonction réciproque de la fonction f. Dans ces conditions on a aussi f est la fonction réciproque de g.

Représentation graphique :



Exercice 8.

1. Exhibez une fonction de référence, continue et strictement monotone sur un intervalle que vous déterminerez et déterminer sa fonction réciproque.
2. Exhibez une fonction de référence, continue et non monotone sur un intervalle que vous déterminerez.
3. Démontrer que dans un repère orthonormé$(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes de f et de sa fonction réciproque g sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère

II. Dérivabilité

II.1. Rappel : nombre dérivée et équation de la tangente

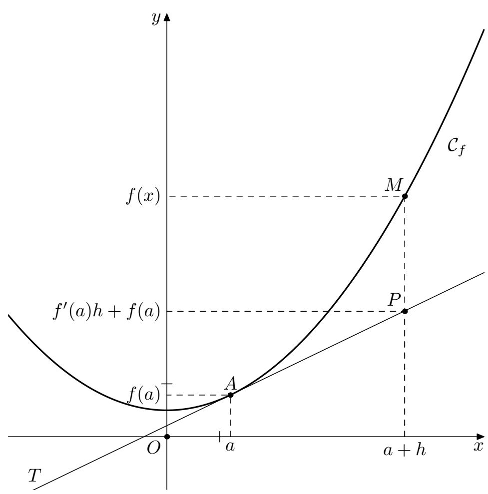
Définition 5.

Rappelons simplement qu'une fonction f est **dérivable en un réel** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé de** f **en** a, et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I lorsqu'elle est dérivable en tout $a \in \mathrm{I}$.
Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre $f'(x)$.

Remarque : En Première, on vous a introduit le nombre dérivé d'une fonction f en a comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse A. Rappelons alors la propriété suivante.



Propriété 1.

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$.
L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

L'équation réduite de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ passant par A est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $\mathrm{A}(a; f(a))$ est un point de T_a, les coordonnées de A vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T_a est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exercice 9. On donne

$$f(x) = -x^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad a = 2$$

Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$ et sa tangente.

II.2. Lien entre continuité et dérivabilité

Propriété 2.

Une fonction dérivable en a est continue en a.
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Preuve

Si f est dérivable en a alors :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Autrement dit pour h proche de 0, il existe une fonction ϵ tel que :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

c'est-à-dire :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

c'est-à-dire :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$$

On obtient alors :

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

ce qui signifie que f est continue en a.

La réciproque de ce résultat n'est pas vraie, il existe des fonctions continue en a mais non dérivable en a. C'est le cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ou encore de la fonction $x \mapsto |x|$ qui sont toutes deux continues en 0 mais non dérivable en 0.

Exercice 10.

1. Montrer que pour $h \neq 0$ on a :

$$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

2. Déterminer la limite lorsque $h \to 0^+$ de :
$$\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h-0}$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 11.

1. Montrer que pour $h>0$ on a :
$$\frac{|h|-|0|}{h-0}=1$$
2. En déduire la limite, à droite de 0, du taux d'accroissement de la fonction valeur absolue.
3. Montrer que pour $h<0$ on a :
$$\frac{|h|-|0|}{h-0}=-1$$
4. En déduire la limite, à gauche de 0, du taux d'accroissement de la fonction valeur absolue.
5. En déduire que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

II.3. Dérivée de $f \circ u$

Théorème 7.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I et u une fonction dérivable sur un intervalle J à valeurs dans I alors $f \circ u$ est dérivable sur l'intervalle J et pour $x \in \mathrm{J}$ on a :
$$\left(f \circ u\right)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x)$$

Admettons ce théorème.

Corollaire 3.

1. On considère une fonction u dérivable sur un intervalle I telle que $u(x)>0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$ alors la fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut :
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$
2. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $g : x \mapsto (u(x))^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est :
   - ⇝ dérivable sur I si $n \in \mathbb{N}$.
   - ⇝ dérivable sur tout intervalle J inclus dans I où u ne s'annule pas si $n<0$.

   De plus on a, lorsque g est dérivable :
$$g'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$$
3. Soit g une fonction dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a :
$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Preuve

- On applique le théorème précédent avec $f(x)=\sqrt{x}$, pour une fonction u à valeurs strictement positive. En effet on sait que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

auquel cas on a :

$$g(x)=f\circ u(x)=\sqrt{u(x)}$$

Par conséquent

$$g'(x)=f'(u(x))\times u'(x)$$

ce qui donne :

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\times u'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

- On applique le théorème précédent avec $f(x)=x^n$ où $n\in\mathbb{Z}$. Une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n<0$ et sa dérivée vaut :

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

On constate que $g=f\circ u$, ainsi, lorsque g est dérivable on a :

$$g'(x)=f'(u(x))\times u'(x)=nu(x)^{n-1}\times u'(x)$$

- On applique encore le théorème précédent avec $u(x)=ax+b$. Dans ce cas on a bien $g(x)=f\circ u(x)=f(ax+b)$ et donc :

$$g'(x)=f'(ax+b)\times u'(x)=af'(ax+b)$$

Exercice 12.

1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+2}$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ et calculer $f'(x)$ pour $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=(-3x+2)^5$$

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.
   (b) En déduire son tableau de variation.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{3}\right\}$ par $h(x)=\frac{1}{3x-5}$
   (a) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{3}\right\}$ et calculer $h'(x)$ pour $x\neq\frac{5}{3}$.
   (b) En déduire le tableau de variation de h.

Exercice 13.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et l'expression de la fonction dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

2. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

1. Donner les limites de f en 0 et $+\infty$; préciser les éventuelles asymptotes.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et l'expression de la fonciton dérivée de f.
3. En déduire le tableau de variations de f.

II.4. Tableau récapitulatif des dérivées

Nous pouvons compléter la liste des dérivées à connaître :

Opération sur les dérivées lorsque u, v et f sont des fonctions dérivables sur un intervalle I		
Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$u+v$	$u'+v'$	
ku (k constante)	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$u^n \quad n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$	$u \neq 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$	
$f \circ u$	$f'(u) \times u'$	

III. Etude des fonctions trigonométriques de référence

III.1. Variations et propriétés

Travail de l'élève : On utilise le logiciel Géogébra.

1. **Figure de base**
   (a) Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O;I;J)$.
   (b) Choisir le radian comme unité d'angle dans « Options ».
   (c) Tracer le cercle trigométrique de centre O.
   (d) Créer un curseur t, variant entre -5π et 5π.
   (e) On veut placer un point M associé au réel t sur le cercle.
   Pour cela, dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1;t)$

   Remarque : Attention, le point-virgule est essentiel ! En effet, le couple $(1;t)$ ne désigne pas pour Géogébra les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(O;I;J)$, mais lui indique que M sera à une distance 1 de l'origine O du repère (donc il sera bien sur le cercle), et tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = t$ radians. On parle de coordonnées **polaires**.

   (f) Créer en ligne de commande le point C de coordonnées $(x_M, 0)$ et le point S de coordonnées $(0, y_M)$
2. **Variations**
   (a) Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O;I;J)$? Son ordonnée ?
   (b) Avec le curseur, déplacer le point M.
   Décrire son trajet, ainsi que ceux de C et de S correspondants.
   (c) En déduire les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-5\pi;5\pi]$.
   On précisera les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   (a) Compléter la figure précédente en crééant les points R et Q de coordonnées respectives (t, x_M) et (t, y_M).
   (b) Faire afficher leurs traces. Quelles courbes représentatives voient-on se dessiner ?
   (c) Vérifier la cohérence entre les courbes obtenus et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   (a) Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   (b) Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
   Connaissez-vous d'autres fonctions de réference possédant cette propriété ?
   (c) Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
   Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Travail de l'élève : En complément pour la parité (en AP ? ?) : Activité 3 p 93 (Déclic)

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1 avec une origine).

Définition 6.

La fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de M est la fonction cosinus, notée cos. Ainsi $x \longmapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de M est la fonction sinus, notée sin. Ainsi $x \longmapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3. (Définitions)

Pour tout réel x, les points du cercle trigonométrique associés aux réels x et $(x+2\pi)$ sont confondus. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(x+2\pi)=\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x+2\pi)=\sin(x)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T (ie telle que $f(x+T)=f(x)$ pour tout $x \in D_f$) sur l'intervalle $[0;T]$ est la mà$^{\text{a}}$me que sur tout intervalle du type $[kT;(k+1)T]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
- Grâce à cette propriété, il suffira d'étudier ces fonctions sur un intervalle de taille 2π de notre choix, par exemple $[-\pi;\pi]$.

Propriété 4. (Définitions)

Pour tout réel x, les points M et M' du cercle trigonométrique, associés respectivement à x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(-x)=-\sin(x)$$

On dit que la fonction cosinus est **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire (ie tel que $f(-x)=f(x)$ pour tout $x \in D_f$) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  Celle d'une fonction impaire (ie telle que $f(-x)=-f(x)$ pour tout $x \in D_f$) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- Grâce à cette propriété, on peut limiter l'étude de ces fonctions à un intervalle de longueur π, par exemple $[0;\pi]$

Reproduire les tableaux et les illustrations de la page 94 du Déclic, pour résumer les résultats précédents.

III.2. Dérivées

Travail de l'élève : Déclic : Activité 2 p 92

Théorème 8.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc continues sur $\mathbb{R}$ aussi) et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Preuve

Exo 44 p 108

Propriété 5.

On en déduit la limite suivante à connaître :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Preuve

On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1$

Exercice(s) du livre : Déclic : n° 12 p 99 (fct tangente, en DM ?)
n° 23 + 28 à 31 + 45 + 47 + 59 + 60 p 105 (dérivées et limites)
n° 50-51-53-65 p 108 (étude de fonctions, tangente)
n° 66-72 p 111 (avec une fonction auxiliaire) n° 68 p 113 (suite de fonctions) n° 71 p 111 (TVI avec trigo)

IV. TP : Exercices guidés

IV.1. Etude de la fonction tangente.

Exercice 1 :

On souhaite étudier et représenter graphiquement la fonction tangente :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. (a) Résoudre l'équation $\cos x = 0$.
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
   (c) Etudier la parité de la fonction tangente.
   (d) Montrer que la fonction tangente est périodique de période π.
   Remarque : Par conséquent, on va se contenter d'étudier la fonction tangente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, puis à l'aide de la parité on complétera le tracé par la symétrie de centre O, et à l'aide de la périodicité par une série de translation « horizontale ».
2. Etudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.
   En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente admet une asymptote dont on précisera la nature et l'équation.
3. Etudier les variations de la fonction tangente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. On montrera que :
$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a :
$$\tan x \geq x$$
   [a]
   (c) En déduire, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T.
5. Tracer, très soigneusement les droites Δ, T et la courbe $\mathscr{C}$. (On se placera entre les bornes -2π et 2π

a. On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.

IV.2. Problème d'optimisation

Objectif

Il s'agit d'appliquer les résultats sur la dérivation à la recherche d'extremums d'une fonction.

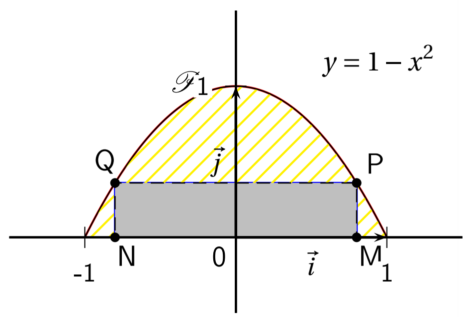
Exercice 2 :

Dans l'arche de parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = 1 - x^2$ (avec $y \geq 0$), on inscrit un rectangle ayant pour axe $(\mathrm{O}y)$, avec M et N sur $(\mathrm{O}x)$, P et Q sur $\mathscr{P}$.
Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale ?

1. Le choix de M détermine entièrement le rectangle, notons x son abscisse. Donner les dimensions du rectangle.
2. En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du rectangle MNOP vaut :

$$\mathscr{A}(x) = -2x^3 + 2x$$

3. Déterminer $\mathscr{A}'(x)$ et dresser son tableau de variation.
4. Conclure.



IV.3. Etude d'une fonction rationnelle

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

1. On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.
   (a) Étudiez le sens de variation de g et montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont vous donnerez un encadrement d'amplitude 10^{-2}. [a]
   (b) Précisez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Étudiez les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.
3. (a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c, et d tels que
   $$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
   (b) Déduisez en que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
   Vérifiez en particulier que $\mathscr{C}$ rencontre Δ en un unique point Δ.
4. Déterminez les abscisses des point B et B' de $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à Δ. [b]
5. (a) Vérifiez que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{2}$. Déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$. [c]
   (b) Tracez Δ, $\mathscr{C}$ ainsi que les points A, B, B' et M, N, P d'abscisses respectives 1, 2 et -1, sans oublier les six tangentes en ces points.

---

a. emploi classique du théorème de la bijection.
b. deux droites parallèles ont le même coefficient directeur...
c. utilisez le fait que $g(\alpha) = 0$.

IV.4. ROC : dérivée d'une composée

Exercice 4 :

1. **Restitution organisée de connaissances**
   La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.
   Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.
   - P : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
   - Q : Soit u une fonction dérivable, de dérivé u' sur $\mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^n$; alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}u'$.
2. On désigne par g la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $]-1\ ;\ 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.
   On considère alors la fonction composée h définie sur $]-\pi\ ;\ 0[$ par
   $h(x) = g(\cos x)$.
   (a) Démontrer que pour tout x de $]-\pi\ ;\ 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h.
   (b) Calculer $h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

IV.5. Extrait de bac étranger

Exercice 5 : BAC Irlandais

1. If $y = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$, find the value of $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ at the point $(4;2)$.
2. The slope of the curve $y = a\sqrt{x} - 5$ at the point $(4;b)$ is 2. Find the values of a and b.
3. If $y = \sqrt{x}$, show that $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{4}y = 0$.

Exercice 6 : BAC Anglais

1. Find the coordinates of the turning points on the curve whose equation is $y = x^3 - 9x^2 + 24x$
2. The function f is given by :
$$f(x) = x + \frac{1}{4x}, \quad x \neq 0$$
Find the range of values of x for which f is an increasing function of x.
3. Differentiate with respect to x $4\sin^3(2x)$.
4. The curve $\mathscr{C}$ has equation $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Find the coordinates of the stationary points and distinguish between them.

Exercice 7 : BAC Suisse

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x^4}{x^3-1}.$$

1. Étudier la fonction f. Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée seconde est la suivante :
$$f''(x) = \frac{12x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}$$
2. Déterminer la pente de la tangente au point d'inflexion (le point d'abscisse x tel que $f''(x) = 0$).
3. Représenter graphiquement la fonction f (unité : 2 carrés ou 1 cm sur feuille millimétrée).

Exercice 8 : BAC Espagnol

Sea f la función definida para $x \neq -2$ por
$$\frac{x^2}{x+2}$$

1. Halla las asintotas de la gráfica de f.
2. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos locales de f.
3. Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica de f.

IV.6. Equation Fonctionnelle

Exercice 9 :

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Nous en étudierons bientôt deux exemplaires en cours :

$$f(x+y)=f(x)\times f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy)=f(x)+f(y)$$

Pour l'heure, nous allons nous contenter de rechercher les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A

1. Montrez que pour tout entier naturel n, $f(n)=n\times f(1)$
2. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1)=p\times f(1/p)$.
3. Montrez que pour tout entier naturel non nul p, $f(1)=p\times f(1/p)$.
4. Déduisez-en que pour tout rationnel r, $f(r)=r\times f(1)$

PARTIE B

On suppose que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=a$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)/x$ pour $x\neq 0$ et $g(0)=a$.

1. Calculez $f(0)$.
2. Montrez que g est continue en 0.
3. Montrez que $g(2x)=g(x)$ pour tout réel x.
4. Déduisez-en que $g(x)=g(x/2^n)$ pour tout réel x et tout entier naturel n.
5. Déduisez-en que g est une fonction constante. [a]
6. Déduisez-en une expression de $f(x)$ pour tout réel x en fonction de a.
7. Réciproquement, vérifiez que les fonctions trouvées à la question 5) sont solutions du problème. Concluez. Comparez avec les résultats de la partie A.

a. Où on utilise un théorème du cours sur la continuité

IV.7. Divers

Exercice 10 :

On munit le plan d'un repère orthonormé.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé.

2. (a) Étudiez les variations de f.
   (b) Factorisez $f(x)$.
   (c) Démontrez que pour tout $x \in [0,1]$
   $$(f \circ f)(x) = x$$
   (d) Construisez la courbe $\mathscr{C}$.
3. On considère les points A_k de coordonnées $(k+1/2,\ 0)$ et B_k de coordonnées $(0,\ 1/2-k)$ où k est un paramètre réel de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
4. On note D_k la droite déterminée par les points A_k et B_k.
   (a) Déterminez une équation de D_k sous la forme $a(k)x + b(k)y + c(k) = 0$ où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable k que l'on déterminera.
   (b) Soit D'_k la droite d'équation $a'(k)x + b'(k)y + c'(k) = 0$ où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.
   (c) Vérifiez que, pour toute valeur de k dans $[-1/2, 1/2]$, les droites D_k et D'_k sont sécantes en un point M_k.
   (d) Démontrez que les coordonnées de M_k sont
   $$x_k = (1/2 + k)^2 \qquad y_k = (1/2 - k)^2$$
   (e) Démontrez que, lorsque k décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, le point M_k décrit la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 11 : Avec une valeur absolue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x - 5|}$$

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}$.

1. Écrivez $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue.
2. Montrez que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = -2$ comme axe de symétrie. Que peut-on en déduire sur le domaine d'étude de f.
3. Étudiez les variations de f là où elle est dérivable.
4. Étudiez la dérivabilité de f en 1. Interprétez graphiquement.
5. Calculez $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$. Interprétez graphiquement.
6. Tracez $\mathscr{C}_f$. Vous prendrez 1cm comme unité en abscisse et 2cm en ordonnées. Vous prendrez soin de tracer les tangentes remarquables.

IV.8. Complément : théorème de Rolle et des accroissements finis

Théorème 9 : *Théorème de Rolle*

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

Nous nous proposons de démontrer ce théorème.

1. Faites un dessin résumant .... et démontrant la situation.
2. Comme f est continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ est un intervalle d'après le TVI. Notons-le $[m,\mathrm{M}]$.
   (a) Si $m=\mathrm{M}$, que peut-on en déduire ?
   (b) Sinon, le maximum M par exemple est atteint pour un réel $e \in]a,b[$. Notons $\tau_e(x)=\dfrac{f(e+x)-f(e)}{x}$.
   Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to 0^-} \tau_e(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau_e(x)$?
   (c) Étudiez le signe de $f'(e)$ et concluez.

Théorème 10 : *théorème des accroissements finis*

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Pour prouver ce théorème, faites une figure. On appellera A le point d'abscisse a, B le point d'abscisse b, M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et P le point du segment $[\mathrm{AB}]$ d'abscisse x. On note enfin $\varphi(x)=\overline{\mathrm{PM}}=y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{P}}$

1. Exprimez $\varphi(x)$ en fonction de x.
2. Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Rolle à φ sur $[a,b]$? Appliquez le et concluez.

Exercice 12 : Application du TAF

1. Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle que $f'(x)=0$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez que f est constante sur $[a,b]$.
2. Soit deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ tells que $f'(x)=g'(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. Démontrez qu'il existe un réel constant C tel que $f(x)=g(x)+\mathrm{C}$ pour tout $x\in[a,b]$.