Correction de l'interrogation n°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

Dans un repère orthonormé on donne $A(3;5)$, $B(1;1)$ et $C(5;-1)$.

1. (a) Calculer AB et AC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

(b) Déterminer le périmètre du triangle ABC.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Le périmètre $\mathscr{P}$ du triangle ABC vaut donc $\mathscr{P} = AB + AC + BC = 2\sqrt{20} + \sqrt{40}$

2. D est le symétrique de A par rapport à B. Déterminer les coordonnées de D.

B est donc le milieu de [AD] par conséquent :

$$x_B = \frac{x_A + x_D}{2} \qquad \text{et} \qquad y_B = \frac{y_A + y_D}{2}$$

d'où :

$$1 = \frac{3 + x_D}{2} \qquad \text{et} \qquad 1 = \frac{5 + y_D}{2}$$

Au final $2 = 3 + x_D$ donc $x_D = -1$ et $2 = 5 + y_D$ donc $y_D = -3$.

$$D(-1;-3)$$

Exercice 2. (6 points)

Dans un repère orthonormé on donne $A(-3;4)$, $B(0;6)$, $C(4;0)$ et $D(1;-2)$.

1. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Pour cela on déterminer les coordonnées des milieux I *et* J *des deux diagonales du quadrilatère* ABCD.

Notons I le milieu de [AC], il a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$I\left(\frac{1}{2};2\right)$$

De même notons J le milieu de [BD] on obtient :

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$$

$$J\left(\frac{1}{2};2\right)$$

On constate que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leurs milieux, par conséquent ABCD est un parallélogramme.

2. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

Déterminons les longueurs des côtés AB, AC et BC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0+3)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

On a enfin $AB^2 + AC^2 = 13 + 52 = 65 = BC^2$ par conséquent, d'après pythagore, ABC est rectangle en A.

3. Que peut-on en déduire de plus sur ABCD .

Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle, donc ABCD est un rectangle.

CORRECTION DE L'INTERROGATION N°4

On prendra soin de coller le sujet sur la copie. La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. (4 points)

Dans un repère orthonormé on donne $A(-3;5)$, $B(2;2)$ et $C(5;-1)$.

1. (a) Calculer AB et AC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5+3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100}$$

(b) Déterminer le périmètre du triangle ABC.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Le périmètre $\mathscr{P}$ du triangle ABC vaut donc $\mathscr{P} = AB + AC + BC = \sqrt{34} + \sqrt{100} + \sqrt{18}$

2. D est le symétrique de A par rapport à B. Déterminer les coordonnées de D.

B est donc le milieu de [AD] par conséquent :

$$x_B = \frac{x_A + x_D}{2} \quad \text{et} \quad y_B = \frac{y_A + y_D}{2}$$

d'où :

$$2 = \frac{-3 + x_D}{2} \quad \text{et} \quad 2 = \frac{5 + y_D}{2}$$

Au final $4 = -3 + x_D$ donc $x_D = 7$ et $4 = 5 + y_D$ donc $y_D = -1$.

$$D(7;-1)$$

Exercice 2. (6 points)

Dans un repère orthonormé on donne $A(-3;4)$, $B(6;0)$, $C(4;0)$ et $D(-5;4)$.

1. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Pour cela on déterminer les coordonnées des milieux I *et* J *des deux diagonales du quadrilatère* ABCD.

Notons I le milieu de [AC], il a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

$$I\left(\frac{1}{2};2\right)$$

De même notons J le milieu de [BD] on obtient :

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$J\left(\frac{1}{2};2\right)$$

On constate que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leurs milieux, par conséquent ABCD est un parallélogramme.

2. ABC est-il un triangle rectangle ?

Déterminons les longueurs des côtés AB, AC et BC :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(6-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

On a enfin $BC^2 + AC^2 = 4 + 65 = 69 < BC^2$=97 par conséquent, d'après pythagore, ABC n'est pas rectangle.

3. Est-il possible que le parallélogramme ABCD soit un carré ? un rectangle ? un losange ? *Justifier votre réponse.*

ABCD n'est ni un rectangle ni un carré puisque le triangle ABC n'est pas rectangle. De plus $AB \neq BC$ donc ce n'est pas un losange non plus.