↜ CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 5 ↝
FONCTIONS ET VARIATIONS.

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

<u>Exercice</u> 1. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-15;15]$ dont voici le tableau de variation :

x	-15		-5		0		5		10		15
$f(x)$	8	↘	2	↗	4	↘	-1	↗	10	↘	0

1. Pour chacune des propositions dire si elle est vraie ou fausse, argumentez.

   (a) *Proposition 1* : $f(1) < f(2)$.
   Puisque $1 < 2$ et comme la fonction f est strictement décroissante sur $[0;5]$ elle inverse l'ordre donc :
   $$f(1) > f(2)$$

   (b) *Proposition 2* : Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-15;0]$ est -1.
   La fonction f étant strictement décroissante sur $[-15,5]$ puis strictement croissante sur $[-5;0]$ elle admet alors un minimum qui est 2 sur l'intervalle $[-15;0]$.

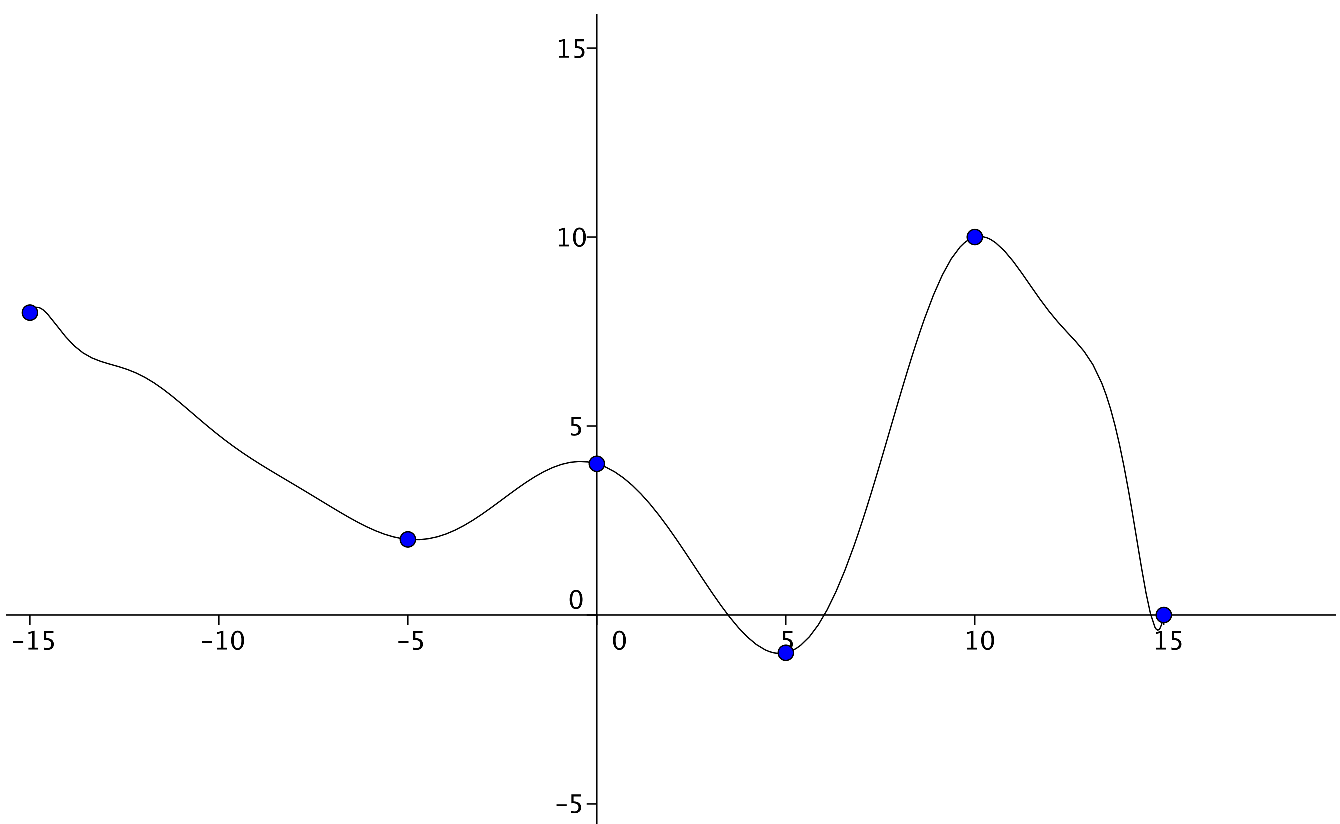
   (c) *Proposition 3* : $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[-15;0]$.
   Etant donné que le minimum de f est 2, il est clair que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $[-15;0]$.

   (d) *Proposition 4* : Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[5;15]$ est 10.

   (e) *Proposition 5* : On ne peut pas comparer $f(11)$ et $f(-11)$.
   $f(11)$ est compris entre 0 et 10, tandis que $f(-11)$ est compris entre 2 et 8, ces deux informations ne permettent pas de comparer $f(11)$ et $f(-11)$.

   (f) *Proposition 6* : La fonction f est négative sur l'intervalle $[0;10]$.
   $f(0) = 4$ donc f n'est pas (toujours) négative sur l'intervalle $[0;10]$.

2. Réaliser une courbe pouvant admettre un tel tableau de variation.



Votre courbe est-elle la seule que l'on puisse tracer ? On peut tracer d'autres courbes (par exemple en reliant chaque point bleu par un segment de droite).

Exercice 2. On considère les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x - 1 \quad ; \quad f_2(x) = -2x + 1 \quad ; \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad f_4(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_5(x) = (x-1)^2 + 2$$

1. Parmi les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 lesquelles sont affines ? *Argumenter*.

   f_1 est affine puisque $f_1(x)$ est écrite sous la forme $ax + b$ avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = -1$.
   f_2 est affine puisque $f_2(x)$ est écrite sous la forme $ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 1$. De même pour f_3 avec $a = 0$ et $b = 0$.
   Enfin les fonctions f_3 et f_5 ne sont pas des fonctions affines car on ne peut les écrire sous la forme $ax + b$.

2. Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2. *Justifier*.

   Puisque $\dfrac{1}{3} > 0$ la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1(x)$	$\nearrow$	

   De même puisque $-2 < 0$ la fonction f_2 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_2(x)$	$\searrow$	

3. Déterminer le minimum de la fonction f_5. Préciser en quelle valeur il est atteint.

   Pour tout réel x on a :

$$(x-1)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Longleftrightarrow f_5(x) \geq 2$$

   De plus pour $x = 1$ pour $f_5(1) = (1-1)^2 + 2 = 0^2 + 2 = 2$, donc f_5 admet un minimum de 2 atteint pour $x = 1$.

Exercice 3. Lors des soldes, un magasin affiche la promotion suivante :
« Pour tout achat dont le montant est strictement inférieur à 100€ profitez de 20% de réduction. Si le montant est supérieur à 100€, bénéficiez de 35% de réduction. »

1. Calculer le prix après réduction d'un article valant initialement 70€.

   Le prix après réduction d'un article valant initialement 70€ :

$$70 \times (1 - 0,2) = 70 \times 0,8 = 56€$$

2. Calculer le prix après réduction d'un article valant initialement 200€.

   Le prix après réduction d'un article valant initialement 200€ :

$$200 \times (1 - 0,35) = 70 \times 0,65 = 130€$$

3. Soit x le prix d'un article avant réduction.

   (a) Montrer que si $x < 100$ le prix en fonction de x que nous noterons $f(x)$ vaut $f(x) = 0,8x$ Si $x < 100$ le prix après réduction d'un article valant initialement x€ vaut :

$$f(x) = x \times (1 - 0,2) = 0,8x$$

   (b) Déterminer $f(x)$ lorsque $x \geq 100$.
   Si $x \geq 100$ alors $f(x) = x \times (1 - 0,35) = 0,65x$.

   (c) Peut-on dire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$? Argumentez.
   Sur l'intervalle $[0;100[$ $f(x) = 0,8x$ donc f est affine avec $a = 0,8 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;100[$.
   De même sur l'intervalle $[100;+\infty[$.
   En revanche $f(90) = 90 \times 0,8 = 72$ et $f(100) = 0,65 \times 100 = 65$ donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^+$

4. Compléter l'algorithme suivant qui pour un prix X affiche le prix après réduction.

Algorithme 1 :

Données: X est un nombre réel positif.
Saisir X.
Si (X < 100) **Alors**
  Afficher $0,8X$
Sinon
  Afficher $0,65X$
Fin Si

5. Compléter le tableau de valeurs suivant :

Prix avant remise	0	20	40	80	100	120	160
Prix après remise	0	16	32	64	65	78	104

6. On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f sur $[0;+\infty[$. Représenter graphiquement $\mathscr{C}_f$ en choisissant pour unité 1 cm = 20 € en abscisse et en ordonnée.