# ↫ CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4 ↬
# VECTEURS.

**La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.**

**Exercice 1.** Dans un repère on considère les points A(−5; 2), B(−3; 1), C(0; 5) et D(2; 4).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(-3+5; 1-2) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}(2; -1)$$

De même :

$$\overrightarrow{CD}(2-0; 4-5) \Longleftrightarrow \overrightarrow{CD}(2; -1)$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc ABDC est un parallélogramme.

2. Déterminer les coordonnées du point E tel que ABEC soit un parallélogramme.
ABEC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. Or, $\overrightarrow{AB}(2; -1)$ et $\overrightarrow{CE}(x_E - 0; y_E - 5)$ donc :

$$x_E = 2 \qquad \text{et} \qquad y_E - 5 = -1 \Longleftrightarrow y_E = 4$$

ABEC est un parallélogramme si et seulement si E(2; 4).

**Exercice 2.** Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(-3; 1) \quad , \quad B(1; -1) \quad , \quad C(3; 3) \quad \text{et} \quad I \text{ milieu de } [AC]$$

1. Déterminer les coordonnées de I.
Puisque I est le milieu du segment [AC] on a :

$$I\left(\frac{-3+3}{2}; \frac{1+3}{2}\right) \Longleftrightarrow I\,(0; 2)$$

2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AB}(1-(-3); -1-1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}\,(4; -2)$
$\overrightarrow{AC}(3-(-3); 3-1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC}(6; 2)$ et enfin :
$\overrightarrow{BC}(3-1; 3-(-1)) \Longleftrightarrow \overrightarrow{BC}(2 : 4)$

3. Quelle est la nature du triangle ABC ?
A l'aide des coordonnées des vecteurs on déduit que :

$$AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

puis :

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

Par conséquent AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B.
De plus

$$AC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

Et $AC^2 = 40 = BC^2 + AB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on a ABC est rectangle en B.

4. (a) Déterminer les coordonnées du point D, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Puisque D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Or, $\overrightarrow{AD}(x_D + 3; y_D - 1)$ et $\overrightarrow{BC}(2;4)$ d'où :

$$x_D + 3 = 2 \qquad \text{et} \qquad y_D - 1 = 4$$

ce qui donne :

$$x_D = -1 \qquad \text{et} \qquad y_D = 5$$

Au final :

$$D(-1;5)$$

(b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? *Justifier*

D'après la question précédente $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. De plus on sait que le triangle ABC est rectangle isocèle en B donc le parallélogramme ABCD est un carré.

5. Déterminer les coordonnées du point J, symétrique de A par rapport à B.

Puisque J est le symétrique du pont A par rapport au point B on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BJ}$$

Or, $\overrightarrow{BJ}(x_J - 1; y_J + 1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$, donc :

$$x_J - 1 = 4 \qquad \text{et} \qquad y_J + 1 = -2$$

ce qui donne :

$$x_J = 5 \qquad \text{et} \qquad y_J = -3$$

donc $J(5;-3)$.

6. Déterminer les coordonnées du point K tel que A soit le milieu de [BK]

Puisque A est le milieu de [BK] on a :

$$x_A = \frac{x_B + x_K}{2} \Longleftrightarrow -3 = \frac{1 + x_K}{2} \Longleftrightarrow -6 = 1 + x_K \Longleftrightarrow x_K = -7$$

de même pour les ordonnées :

$$y_A = \frac{y_B + y_K}{2} \Longleftrightarrow 1 = \frac{-1 + y_K}{2} \Longleftrightarrow -2 = -1 + y_K \Longleftrightarrow y_K = -1$$

7. Soit $E(\alpha;2)$. Déterminer $\alpha$ tel que A, B et E soient alignés.

$\overrightarrow{AE}(\alpha + 3; 2 - 1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AE}(\alpha + 3; 1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$.

A, B et E soint alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire donc si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

$$-2(\alpha + 3) = 4 \times 1 \Longleftrightarrow -2\alpha - 6 = 4 \Longleftrightarrow -2\alpha = 10 \Longleftrightarrow \alpha = -5$$

Pour que A, B et E soit alignés il faut que $\alpha = -5$.

8. Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A, B et F soient alignés.

Puisque F est sur l'axe des abscisses son ordonnée vaut 0 donc $F(x_F;0)$.

A, B et F soint alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire donc si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

Or, $\overrightarrow{AF}(x_F + 3; -1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$ ce qui donne :

$$-2(x_F + 3) = 4 \times (-1) \Longleftrightarrow -2x_F - 6 = -4 \Longleftrightarrow -2x_F = 2 \Longleftrightarrow x_F = -1$$

Lorsque $F(-1;0)$ alors F est sur l'axe des abscisses et A, B et F sont alignés.

9. Déterminer les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que (BG) et (AI) soient parallèles.

G appartient à l'axe des ordonnées si et seulement son abscisse vaut 0, donc on cherche $y$ tel que $G(0; y)$ et $(BG)//(AI)$.
Les droites (BG) et (AI) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BG}(-1; y+1)$ et $\overrightarrow{AI}(3; 1)$ sont colinéaires donc :

$$-1 = 3(y+1) \iff 3y + 3 = -1 \iff 3y = -4 \iff y = -\frac{4}{3}$$

**Exercice 3.** On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en B avec AB = 2.5 cm.

1. Soit F le point tel que

$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$$

Placer F.

2. Soit M le point tel que $-2\overrightarrow{BM} + 5\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

(a) Montrer que

$$\overrightarrow{BM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$-2\overrightarrow{BM} + 5\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \iff -2\overrightarrow{BM} + 5\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$$

ce qui donne :

$$3\overrightarrow{BM} + 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{BM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$$

(b) Placer M sur la figure précédente.

3. Montrer que $3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{BC}$

Puisque $\overrightarrow{BM} = \frac{5}{3}\overrightarrow{BC}$ on a $3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{BC}$ puis en déduire que :

$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AM}$$

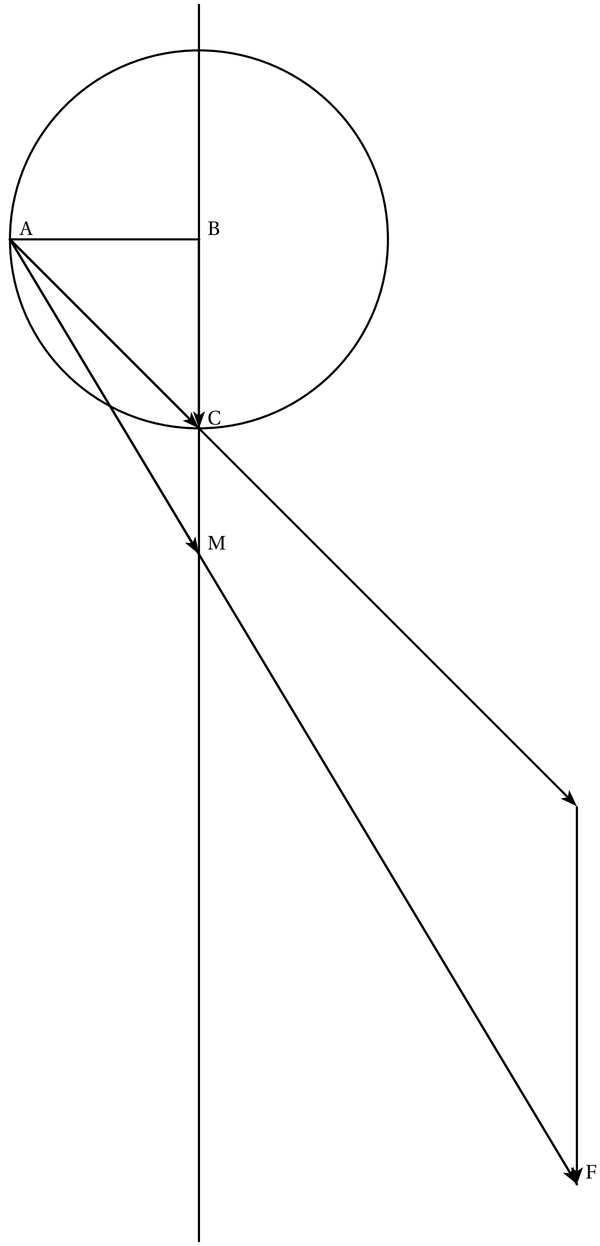
$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC}$$

Et puisque $3\overrightarrow{BM} = 5\overrightarrow{BC}$ alors

$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AM}$$

4. Que peut-on en déduire pour les points A, F et M ?

On vient de démontrer que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AM}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires donc les points A, F et M sont alignés.




**Question Cactus (Bonus)** : **La corde autour de la terre.**

Considérons une corde dont le périmètre est très exactement celui de la planète terre. On ajoute à cette corde, disons 4 mètres. On suppose que la terre est une sphère et que son rayon vaut 6400 km.

De combien s'élève la corde de la surface de la terre ?

Le périmètre de la première corde est $2\pi r = 6400$ donc $r = \dfrac{6400}{2\pi}$

Le périmètre de la deuxième corde est $2\pi \mathrm{R} = 6404$ donc $\mathrm{R} = \dfrac{6404}{2\pi}$

La corde s'élève d'une hauteur $h$ donnée par :

$$h = \mathrm{R} - r = \frac{6404}{2\pi} - \frac{6400}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$