ൠ Devoir Surveillé 1 ൠ
Arithmétique

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$.
   $n-4|n-4$ alors si $n-4|3n-17$ il divise toutes les combinaisons linéaires de $n-3$ et $3n-17$, en particulier on a :
   $$n-4|3n-17-3(n-4) \Longleftrightarrow n-4|-17+12 \Longleftrightarrow n-4|-5$$
   $n-4$ est donc un diviseur de 5 ; la liste des diviseurs de 5 étant :
   $$\mathscr{D}_5 = \{-5;-1;1;5\}$$
   $n-4=-5 \Longleftrightarrow n=-1$; $n-4=-1 \Longleftrightarrow n=3$; $n-4=1 \Longleftrightarrow n=5$ et $n-4=5 \Longleftrightarrow n=9$.
   Les possibles entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$ sont donc -1, 3, 5 ou 9.
   Vérifions le : Si $n=-1$ alors $n-4=-1-4=-5$ et $3n-17=-3-17=-20$ et effectivement $-5|-20$
   Si $n=3$ alors $n-4=-1$ et $3n-17=-8$ et effectivement $-1|-8$.
   Si $n=5$ alors $n-4=1$ et $3n-17=-2$ et $1|-2$.
   Si $n=9$ alors $n-4=5$ et $3n-17=27-17=10$ et $5|10$.
   Chacunes des valeurs trouvées est donc bien solution, l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n-4$ divise $3n-17$ est donc :
   $$\{-1;3;5;9\}$$
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $\dfrac{3n-17}{n-4}$ soit un entier naturel.
   Il n'y a que 4 candidats, en observant la question précédente on s'aperçoit que si $n=5$ alors $\dfrac{3n-17}{n-4}=-2 \notin \mathbb{N}$. Les trois autres possibilités donnent bien un quotient entier naturel donc :
   $$\mathscr{S} = \{-1;3;9\}$$

Exercice 2.

1. Donner la liste des diviseurs de 15. En déduire tous les couples d'entiers relatifs $(a;b)$ tels que $15=ab$.
   La liste des diviseurs de 15 est :
   $$\mathscr{D}_{15} = \{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$$
   Ainsi $15=(-15)\times(-1)=(-5)\times(-3)=(-3)\times(-5)=(-1)\times(-5)=1\times 5=3\times 5=5\times 3=15\times 1$.
   Tous les couples d'entiers relatifs $(a;b)$ tels que $15=ab$ sont donc :
   $$\mathscr{S} = \{(-15;-1),(-5;-3),(-3;-5),(-1;-15),(1;15),(3;5),(5;3),(15;1)\}$$
2. Dans cette question x et y désignent des entiers naturels.
   (a) Exprimer $4x^2-49y^2$ comme produit de deux nombres entiers relatifs p et q avec $p<q$.
   $$4x^2-49y^2=(2x-7x)(2x+7y)$$
   Puisque x et y sont des entiers naturels $2x+7y>2x-7y$ donc on choisit $p=2x-7x$ et $q=2x+7y$, on a bien $p<q$.
   Préciser p et q et justifier que $q\in\mathbb{N}$.
   Puisque $x\geq 0$ et $y\geq 0$ alors $2x+7y\geq 0$ donc $q\in\mathbb{N}$.
   (b) Déduire des deux premiers questions tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ solutions de l'équation $4x^2-49y^2=15$.
   On a $pq=15$ avec $q\in\mathbb{N}$ et $p<q$ donc $q=15 \Longrightarrow p=1$ ou $q=5 \Longrightarrow p=3$. On résout deux systèmes :
   $$\left\{\begin{array}{l}2x-7y=1\\2x+7y=15\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x=16\\2x+7y=15\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=4\\8+7y=15 \Leftrightarrow 7y=7 \Leftrightarrow y=1\end{array}\right.$$

Un premier couple solution est $(4;1)$.

$$\left\{\begin{array}{l}2x-7y=3\\2x+7y=5\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4x=8\\2x+7y=5\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\\4+7y=15 \Leftrightarrow 7y=11 \Leftrightarrow y=\dfrac{11}{7}\end{array}\right.$$

$\dfrac{11}{7} \notin \mathbb{N}$ on en déduit qu'il n'y a qu'un couple d'entier naturel solution tel que $4x^2-49y^2=15$.

$$\mathscr{S}=\{(4;1)\}$$

3. Donner tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ solutions de $4x^2-49y^2=15$.
   On ne demande pas de calcul fastidieux.
   Puisque $x^2=(-x)^2$ et $y^2=(-y)^2$ tous les couples de la forme $(\pm 4;\pm 1)$ sont solutions de $4x^2-49y^2=15$ d'où :

$$\mathscr{S}=\{(-4;-1),(-4;1),(4;-1),(4,1)\}$$

<u>Exercice</u> 3.

1. Soit n un entier naturel.
   (a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a
   $$2^{3k}\equiv 1[7]$$
   On a :
   $$2^3=8\equiv 1[7]$$
   Pour tout entier naturel k on a donc :
   $$2^{3^k}\equiv 1^k[7] \Longleftrightarrow 2^{3k}\equiv 1[7]$$
   (b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2013} par 7 ?
   La somme des chiffres de 2013 est $6=3\times 2$ donc 2013 est divisible par 3, il existe un entier naturel k tel que $2013=3k$, d'après la question précédente on en déduit que :
   $$2^{2013}\equiv 1[7]$$

2. Soit a et b deux nombres entiers naturels inférieur ou égaux à 9 avec $a\neq 0$.
   On considère $\mathrm{N}=a00b$.
   (a) Vérifier que $10^3\equiv -1[7]$.
   $1000=7\times 342+6$ par conséquent $10^3\equiv 6[7]$ et $6\equiv -1[7]$ d'où :
   $$10^3\equiv -1[7]$$
   (b) En déduire que $\mathrm{N}\equiv -a+b[7]$.
   $\mathrm{N}=a00b=a\times 10^3+b$
   Puisque $10^3\equiv -1[7]$ on a :
   $$a10^3\equiv -a[7] \Longrightarrow a10^3+b\equiv -a+b[7] \Longrightarrow \mathrm{N}\equiv -a+b[7]$$
   (c) Déterminer parmi les nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
   $7|\mathrm{N} \Longleftrightarrow \mathrm{N}\equiv 0[7] \Longleftrightarrow -a+b\equiv 0[7]$.
   Puisque a et b sont des chiffres on a :
   $$1\leq a\leq 9 \Longleftrightarrow -9\leq -a\leq -1 \qquad \text{et} \qquad 0\leq b\leq 9$$
   d'où :
   $$-9\leq -a+b\leq 8$$
   Par conséquent $-a+b\equiv 0[7] \Longleftrightarrow -a+b=-7 \quad$ ou $\quad -a+b=0 \quad$ ou $\quad -a+b=7$
   ce qui donne :
   $$-a+b\equiv 0[7] \Longleftrightarrow b=-7+a \quad \text{ou} \quad a=b \quad \text{ou} \quad b=7+a$$

- **Cas 1** : $b = -7 + a$ et $a \neq 0$ et b sont des chiffres donc les solutions sont :

$$\mathscr{S} = \{8001; 9002\}$$

- **Cas 2** : $a = b$ et $a \neq 0$ et b sont des chiffres donc les solutions sont :

$$\mathscr{S} = \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009\}$$

- **Cas 3** : $b = 7 + a$ et $a \neq 0$ et b sont des chiffres donc les solutions sont :

$$\mathscr{S} = \{1008; 2009\}$$

L'ensemble des nombres $\mathrm{N} = a00b$ divisible par 7 est :

$$\mathscr{S} = \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 8001; 9002; 1008; 2009\}$$

Exercice 4. A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $19m + 3$ par 26 et on le note p.

Etape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder le mot EUX.
   $19 \times 4 + 3 = 79$ et $79 \equiv 1[26]$ donc E est codé par B.
   $19 \times 20 + 3 = 383$ et $383 \equiv 19[26]$ donc U est codé par T.
   $19 \times 23 + 3 = 440$ et $440 \equiv 24[26]$ donc X est codé par Y.
   EUX est codé par BTY.
2. (a) Vérifier que $19 \times 11 \equiv 1[26]$.
   $26 | 19 \times 11 - 1 = 208$ donc on a bien $19 \times 11 \equiv 1[26]$.

   (b) En déduire que $209m + 33 \equiv m + 7[26]$.
   On a, pour tout nombre entier m :

$$209 \equiv 1[26] \Longrightarrow 209m \equiv m[26] \Longrightarrow 209m + 33 \equiv m + 33[26]$$

   Or $33 \equiv 7[26]$ donc $m + 33 \equiv m + 7[26]$ par conséquent :

$$209m + 33 \equiv m + 7[26]$$

   (c) Montrer que si $19m + 3 \equiv p[26]$ alors $m \equiv 11p - 7[26]$

$$19m + 3 \equiv p[26] \Longrightarrow 209m + 33 \equiv 11p[26] \Longrightarrow m + 7 \equiv 11p[26] \Longrightarrow m \equiv 11p - 7[26]$$

   On admet que la réciproque est vraie i.e. on admet que si $m \equiv 11p - 7[26]$ **alors** $19m + 3 \equiv p[26]$**.**
   Prouvons le.

$$m \equiv 11p - 7[26] \Longrightarrow 19m \equiv 209p - 133[26]$$

   Or, $-133 \equiv -3[26]$ et $209 \equiv 1[26] \Longrightarrow 209p \equiv p[26]$ donc $209p - 33 \equiv p - 3[26]$ d'où :

$$19m \equiv p - 3[26] \Longrightarrow 19m + 3 \equiv p[26]$$

   On a donc montré que :

$$19m + 3 \equiv p[26] \Longleftrightarrow m \equiv 11p - 7[26]$$

3. Décoder SB.
   D'après la question précédente la fonction g de décodage est celle qui à l'entier p associe le reste modulo 26 de $11p-7$.
   $11\times 18-7=191\equiv 9[26]$ donc S est décodé par J.
   $11\times 1-7=4\equiv 4[26]$ donc B est décodé par E.
   SB est le mot qui code le mot JE.