∽ CORRECTION DS 1 ∾
TABLEAU DE SIGNE - DISTANCE MILIEU

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. *Les ensembles de nombres* (3 points)

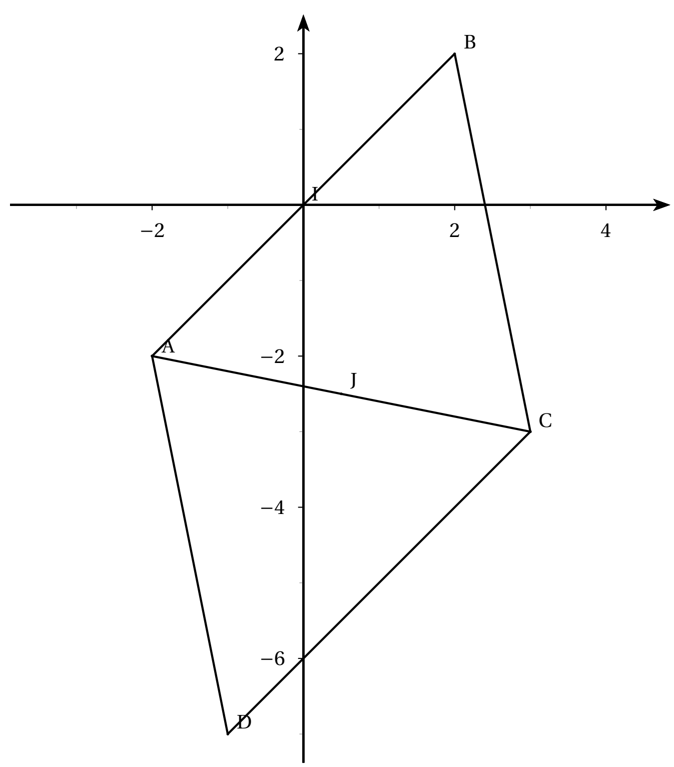
Donner pour chacun des 4 ensembles précédents un exemple de nombre qui en fait partie et un exemple de nombre qui n'en fait pas partie.

1. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des **nombres entiers naturels.**
   $53 \in \mathbb{N}$, en revanche $-5 \notin \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des **nombres réels.**
   N'importe quel nombre appartient à $\mathbb{R}$ (1 ou -5 ou $3,46$ ou $\sqrt{3}$ ou encore π et $\dfrac{-1}{3}$ sont des nombres réels).
3. $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels**.
   Tous les nombres que l'on peut écrire sous forme de fraction sont rationnels. ($4 = \dfrac{4}{1}$ ou $\dfrac{-1}{3}$ ou $-10,3 = \dfrac{-103}{10}$ sont des nombres rationnels, $\sqrt{2}$ ou π ne sont pas des nombres rationnels.)
4. $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **nombres entiers relatifs**.
   -5 ou 36 sont des entiers relatifs mais $5,3$ n'est pas un entier relatif.

Exercice 2. (7 points)

Dans un repère orthonormé on donne $A(-2;-2)$, $B(2;2)$, $C(3;-3)$.

1. Réaliser une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.



2. (a) Calculer AB, AC et BC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

Et enfin :

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

(b) En déduire la nature du triangle ABC.
On a BC = AC donc le triangle ABC est isocèle en C.
De plus $AB^2 = 32$ et $BC^2 + AC^2 = 26 + 26 = 52$ donc d'après le théorème de Pythagore ABC n'est pas un triangle rectangle.

3. (a) Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AB].

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$$

Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées :

$$I(0;0)$$

(b) Déterminer l'aire du triangle ABC.
$\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. On choisit comme base : AB, puisque le triangle ABC est isocèle en C la hauteur issue de C coupe le segment [AB] en son milieu I. On a alors :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{AB \times IC}{2}$$

De plus :

$$IC = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Au finale l'aire du triangle ABC vaut :

$$\mathscr{A}(ABC) = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{2\sqrt{8} \times \sqrt{18}}{2} = \sqrt{8} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 \times 2 = 12 \text{unité d'aire}$$

4. (a) On considère le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Calculer les coordonnées de D.
Les diagonales d'un parallélogramme se coupe en leurs milieux. Par conséquent le milieu J de la diagonale [AC] est aussi le milieu de la diagonale [BD].

$$x_J = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = 0,5 \qquad \text{et} \qquad \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+(-3)}{2} = -2,5$$

$J(0,5;-2,5)$ et J est le milieu de [BD] donc :

$$0,5 = \frac{2 + x_D}{2} \iff 1 = 2 + x_D \iff x_D = -1$$

et

$$-2,5 = \frac{2 + y_D}{2} \iff -5 = 2 + y_D \iff y_D = -7$$

D a pour coordonnées $(-1;-7)$.

(b) Préciser la nature du parallélogramme ABCD.
Puisque $AB \neq AC$ le parallélogramme ABCD n'est ni un losange ni un carré. Puisque ABC n'est pas un triangle rectangle le parallélogramme ABCD n'est pas un rectangle.
Conclusion : ABCD est simplement un parallélogramme.

Exercice 3. *Intervalle* (4 points)

1. A quel intervalle de $\mathbb{R}$, x appartient-il dans chacun des cas suivants :

(a) $3x - 3 < 5 - 2x \iff 5x < 8 \iff x < \dfrac{8}{5}$. Au final on a :

$$x \in \left]-\infty; \frac{8}{5}\right[$$

(b) $3 < -3x+1 \leq 7 \Longleftrightarrow 2 < -3x \leq 6 \Longleftrightarrow -\frac{2}{3} > x \geq -2 \Longleftrightarrow -2 \leq x < \frac{2}{3}$. Au final on a :

$$x \in \left[-2; \frac{2}{3}\right[$$

2. On considère deux nombres $x \in [1;7[$ et $y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

   (a) Donner un intervalle auquel appartient le nombre $x+y$

   Au minimum la somme $x+y$ vaut $1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et cette somme ne dépassera jamais $7+\frac{3}{2} = 8,5$ d'où :

   $$x+y \in \left[\frac{3}{2}; 8,5\right[$$

   (b) Donner un intervalle auquel appartient le nombre $x-y$

   Au minimum la différence $x-y$ vaut $1-\frac{3}{2} = -0,5$ et cette différence ne dépassera jamais $7-\frac{1}{2} = 6,5$, par conséquent :

   $$x-y \in [-0,5; 6,5[$$

Exercice 4. *Tableau de signe* (4 points)

Etablir le tableau de signe des expressions suivantes *(on justifiera)* :

1. $3x-1$.
   $3x-1 \geq 0 \Longleftrightarrow 3x \geq 1 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	

2. $1-2x$.
   $1-2x \geq 0 \Longleftrightarrow -2x \geq -1 \Longleftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ d'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	

Exercice 5. *Un problème* (2 points)

Un père de trois enfants laisse en héritage 1600 couronnes. Le testament précise que l'aîné doit recevoir 200 couronnes de plus que le deuxième, le deuxième 100 couronnes de plus que le dernier. De quelle somme hérite chacun des enfants ?

Notons x la somme que reçoit le plus jeune des trois enfants. le deuxième reçoit alors $x+100$ couronnes et l'aîné reçoit alors $x+100+200 = x+300$.

La somme doit faire 1600 d'où :

$$x+x+100+x+300 = 1600$$

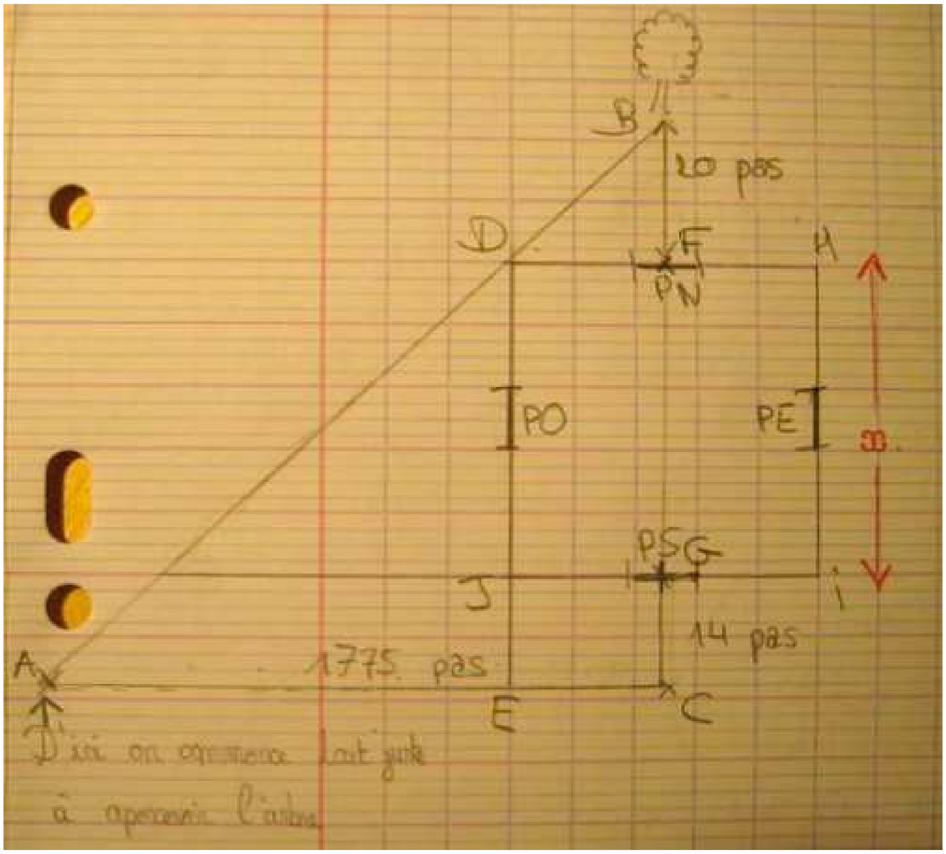
c'est-à-dire :

$$3x+400 = 1600 \Longleftrightarrow 3x = 1200 \Longleftrightarrow x = 400$$

Le plus jeune reçoit 400 couronnes, le deuxième 500 couronnes et l'aîné 700 couronnes.

Exercice 6. *Un vieux problème chinois* **(Bonus)**

Une ville carré de dimensions inconnues comprend une porte au milieu de chaque côté. A l'extérieur de la ville, vingt mètre après la sortie nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze mètres vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.
On cherche les dimensions de la ville.
Voici un schéma de la situation :



D'après le théorème de Thales on a :

$$\frac{BN}{BC} = \frac{DF}{AC} \Longleftrightarrow \frac{20}{34+x} = \frac{x/2}{1775} \Longleftrightarrow 35500 = \frac{x}{2}(34+x) \Longleftrightarrow 35500 = 17x + \frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow 71000 = 34x + x^2$$

On résout alors cette équation :

$$x^2 + 34x = 71000 \Longleftrightarrow (x+17)^2 - 289 = 71000 \Longleftrightarrow (x+17)^2 = 71289 \Longleftrightarrow x+17 = \sqrt{71289} \quad \text{ou } x+17 = -\sqrt{71289}$$

La solution négative n'a pas de sens car on cherche les dimensions d'une ville, ce qui donne donc :

$$x = \sqrt{71289} - 17 = 250$$

Par conséquent la ville est un carré de 250 mètres de côtés. [1]

1. Ce problème est issu des Neuf Chapitres sur l'art du calcul, ouvrage choinois datant d'il y a a peu près 2000 ans.