ൠ CORRECTION DEVOIR MAISON 7 ൠ
CONGRUENCE

Exercice 1. ♠♠♠

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
   Si $a \equiv 0[2]$ et $b \equiv 0[2]$ alors :
   $$a^2 \equiv 0[2] \qquad \text{et} \qquad b^2 \equiv 0[2]$$
   Et enfin :
   $$N = a^2 - b^2 \equiv 0[2]$$
   Or, N est impair, par conséquent il n'est pas possible d'avoir simultanément $a \equiv 0[2]$ et $b \equiv 0[2]$.
   De même si $a \equiv 1[2]$ et $b \equiv 1[2]$ alors :
   $$a^2 \equiv 1[2] \qquad \text{et} \qquad b^2 \equiv 1[2]$$
   Et enfin :
   $$N = a^2 - b^2 \equiv 0[2]$$
   Or, N est impair, par conséquent il n'est pas possible d'avoir simultanément $a \equiv 1[2]$ et $b \equiv 1[2]$.
   a et b ne peuvent pas donc pas avoir la même parité. Si l'un est pair, l'autre est nécessairement impair.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q. On a :
   $$N = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
   Puisque N est un entier naturel alors $a^2 - b^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 \geq b^2$, et puisque a et b sont aussi des entiers naturels, alors $a \geq b$. Ainsi $p = a - b$ et $q = a + b$ sont deux entiers naturels dont le produit vaut N.
3. Quelle est la parité de p et de q ? Si $a \equiv 1[2]$ alors $b \equiv 0[2]$ d'après 1., auquel cas
   $$p = a - b \equiv 1[2] \qquad \text{et} \qquad q = a + b \equiv 1[2]$$
   De même si $a \equiv 0[2]$ alors $b \equiv 1[2]$, auquel cas
   $$p = a - b \equiv -1[2] \Longrightarrow p \equiv 1[2] \qquad \text{et} \qquad q = a + b \equiv 1[2]$$
   Dans tous les cas, p et q sont deux entiers naturels impairs.

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation :
$$\text{(E)} \quad a^2 - 250507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
   (a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

Reste possible de X par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste possible de X^2 par 9	0	1	4	0	7	7	0	4	1

   (b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.

Puisque $a^2 - 250\,507 = b^2$, $a^2 - 250\,507$ est un carré, donc les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$ sont 0, 1, 4 et 7 d'après la question qui précède.
Si $a^2 - 250\,507 \equiv 0[9]$ alors $a^2 \equiv 250\,507[9]$. Or, $250\,507 = 27834 \times 9 + 1 \Longrightarrow 250\,507 \equiv 1[9]$ donc $a^2 \equiv 1[9]$.
De même si $a^2 - 250\,507 \equiv 1[9]$ alors $a^2 \equiv 250\,507 + 1[9]$ d'où $a^2 \equiv 2[9]$. Ceci est impossible, un carré ne pouvant être congrue à 2 modulo 9 d'après la question précédente.
De même si $a^2 - 250\,507 \equiv 4[9]$ alors $a^2 \equiv 5[9]$ (puisque toujours $250\,507 \equiv 1[9]$). Ceci est impossible, un carré ne pouvant être congrue à 5 modulo 9.
Enfin si $a^2 - 250\,507 \equiv 7[9]$ alors $a^2 \equiv 8[9]$ ce qui est impossible.
Conclusion : $a^2 \equiv 1[9]$.

(c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
D'après la question précédente $a^2 \equiv 1[9]$, les seuls nombres dont le carré est congrue à 1 modulo 9 sont congrues à 1 modulo 9 ou à 8 modulo 9 d'après le tableau réalisé en 1.(a).

2. Justifier que si le couple (a ; b) vérifie la relation (E), alors $a > 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501 ; b).
$a^2 - 250\,507 = b^2$ donc $a^2 - 250\,507 \geq 0$ donc $a^2 \geq 250\,507$. Puisque $a \in \mathrm{N}$ on a :

$$a \geq \sqrt{250\,507} \Longrightarrow a \geq 500,5 \Longrightarrow a \geq 501$$

De plus $501 = 9 \times 55 + 6$ donc $501 \equiv 6[9]$, or a est congrue à 1 ou à 8 modulo 9, il est impossible que $a = 501$, par conséquent :

$$a > 501$$

Puisque $a > 501$ il ne peut exister de solutions du type $(501, b)$.

3. On suppose que le couple (a ; b) vérifie la relation (E).

(a) Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
On sait que a est congru à 1 ou à 8 modulo 9. Or :

$$503 \equiv 8[9] \qquad \text{et} \qquad 505 \equiv 1[9]$$

Par conséquent si $a \equiv 1[9]$ alors $a \equiv 505[9]$ et si $a \equiv 8[9]$ alors $a \equiv 503[9]$.

(b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k$; $b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
Si $k = 0$ alors $a = 505 + 9 \times 0 = 505$ et :

$$a^2 - 250507 = 505^2 - 250507 = 4518$$

Et $\sqrt{4518} \simeq 67,2 \in \mathbb{N}$ donc $k = 0$ n'offre pas une solution à l'équation (E).
Si $k = 1$ alors $a = 505 + 9 = 514$ et :

$$a^2 - 250507 = 514^2 - 250507 = 13689$$

Et $\sqrt{13689} = 117 \in \mathbb{N}$ donc pour $k = 1$ le couple $(a = 514, b = 117)$ est solution de (E).

4. Déduire des questions précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
D'après la question précédente on a :

$$514^2 - 250507 = 117^2 \Longleftrightarrow 514^2 - 117^2 = 250507 \Longleftrightarrow (514 - 117)(514 + 117) = 250507 \Longleftrightarrow 397 \times 631 = 250507$$