DEVOIR MAISON 4 : LES VECTEURS

Ce devoir maison de révisions, de préparation au DS4 comporte deux pages. Vous traiterez au choix au moins la première ou la deuxième page.

Exercice 1. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(-3;1) \quad , \quad B(1;-1) \quad , \quad C(3;3) \quad \text{et} \quad I \text{ milieu de } [AC]$$

1. Déterminer les coordonnées de I.

   Puisque I est le milieu du segment [AC] on a :

   $$I\left(\frac{-3+3}{2};\frac{1+3}{2}\right) \iff I(0;2)$$

2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

   $\overrightarrow{AB}(1-(-3);-1-1) \iff \overrightarrow{AB}(4;-2)$
   $\overrightarrow{AC}(3-(-3);3-1) \iff \overrightarrow{AC}(6;2)$ et enfin :
   $\overrightarrow{BC}(3-1;3-(-1)) \iff \overrightarrow{BC}(2:4)$

3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

   A l'aide des coordonnées des vecteurs on déduit que :

   $$AB = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

   puis :

   $$BC = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$$

   Par conséquent AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B.
   De plus

   $$AC = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}$$

   Et $AC^2 = 40 = BC^2 + AB^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore on a ABC est rectangle en B.

4. (a) Déterminer les coordonnées du point D, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

   Puisque D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
   Or, $\overrightarrow{AD}(x_D+3;y_D-1)$ et $\overrightarrow{BC}(2;4)$ d'où :

   $$x_D+3=2 \qquad \text{et} \qquad y_D-1=4$$

   ce qui donne :

   $$x_D=-1 \qquad \text{et} \qquad y_D=5$$

   Au final :

   $$D(-1;5)$$

   (b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? *Justifier*

   D'après la question précédente $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. De plus on sait que le triangle ABC est rectangle isocèle en B donc le parallélogramme ABCD est un carré.

5. Déterminer les coordonnées du point J, symétrique de A par rapport à B.

   Puisque J est le symétrique du pont A par rapport au point B on a :

   $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BJ}$$

   Or, $\overrightarrow{BJ}(x_J-1;y_J+1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$, donc :

   $$x_J-1=4 \qquad \text{et} \qquad y_J+1=-2$$

   ce qui donne :

$$x_J = 5 \qquad \text{et} \qquad y_J = -3$$

donc $J(5;-3)$.

6. Déterminer les coordonnées du point K tel que A soit le milieu de [BK]

   Puisque A est le milieu de [BK] on a :

$$x_A = \frac{x_B + x_K}{2} \iff -3 = \frac{1 + x_K}{2} \iff -6 = 1 + x_K \iff x_K = -7$$

   de même pour les ordonnées :

$$y_A = \frac{y_B + y_K}{2} \iff 1 = \frac{-1 + y_K}{2} \iff -2 = -1 + y_K \iff y_K = -1$$

7. Soit $E(\alpha;2)$. Déterminer α tel que A, B et E soient alignés.

   $\overrightarrow{AE}(\alpha+3;2-1) \iff \overrightarrow{AE}(\alpha+3;1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$.

   A, B et E soint alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire donc si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

$$-2(\alpha+3) = 4 \times 1 \iff -2\alpha - 6 = 4 \iff -2\alpha = 10 \iff \alpha = -5$$

   Pour que A, B et E soit alignés il faut que $\alpha = -5$.

8. Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que A, B et F soient alignés.

   Puisque F est sur l'axe des abscisses son ordonnée vaut 0 donc $F(x_F;0)$.

   A, B et F soint alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire donc si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

   Or, $\overrightarrow{AF}(x_F+3;-1)$ et $\overrightarrow{AB}(4;-2)$ ce qui donne :

$$-2(x_F+3) = 4 \times (-1) \iff -2x_F - 6 = -4 \iff -2x_F = 2 \iff x_F = -1$$

   Lorsque $F(-1;0)$ alors F est sur l'axe des abscisses et A, B et F sont alignés.

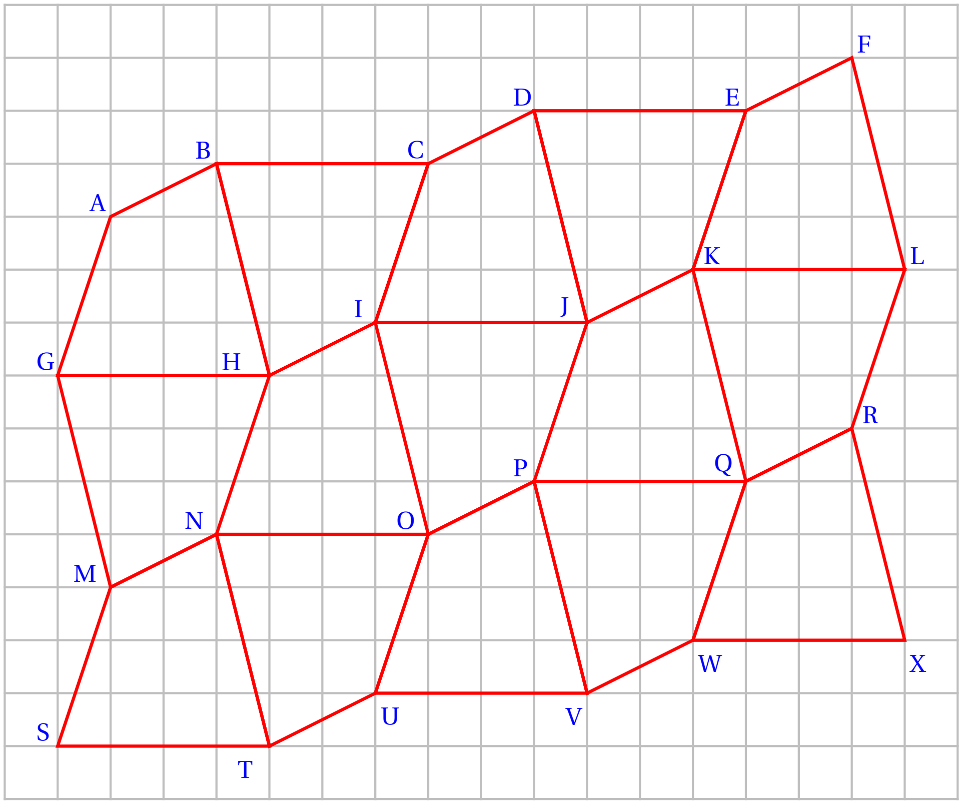
9. Déterminer les coordonnées du point G appartenant à l'axe des ordonnées tel que (BG) et (AI) soient parallèles.

   G appartient à l'axe des ordonnées si et seulement son abscisse vaut 0, donc on cherche y tel que $G(0;y)$ et $(BG)//(AI)$.

   Les droites (BG) et (AI) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BG}(-1;y+1)$ et $\overrightarrow{AI}(3;1)$ sont colinéaires donc :

$$-1 = 3(y+1) \iff 3y + 3 = -1 \iff 3y = -4 \iff y = -\frac{4}{3}$$

Exercice 2.



En utilisant le pavage ci-dessus réalisé à l'aide de quadrilatère identiques, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est l'image du quadrilatère ABHG par la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$?

   L'image du quadrilatère ABHG par la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$ est le quadrilatère JKQP.
2. Quelle est l'image du quadrilatère ABHG par la symétrie ayant pour centre le milieu du segment [HI] ?

   L'image du quadrilatère ABHG par la symétrie ayant pour centre le milieu du segment [HI] est le quadrilatère IJPO.
3. Parmi les vecteurs $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{HV}$, $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{PH}$, $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{AO}$, quels sont ceux de la translation qui transforme le quadrilatère PQWV en BCIH ?

   Seules les translations associés aux vecteurs $\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{RD}$ transforme PQWV en BCIH.
4. On fait agir sur le quadrilatère ABHG la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$, suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

   (a) Quel est le quadrilatère ainsi obtenu ?

   L'image du quadrilatère ABHG par la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ est le quadrilatère NOIH. Puis le quadrilatère NOIH est transformé en le quadrilatère IJDC par la translation de vecteur $\overrightarrow{OJ}$

   (b) Compléter l'égalité suivante : $\overrightarrow{G\ldots} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{N\ldots} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{OJ}$

   On a $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{NI}$ donc :

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{GI}$$

Exercice 3. On considère un triangle ABC. D est le point tel que :

$$\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{BC}$$

et G et le point tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$$

1. Transformer l'égalité qui définit le point D afin de pouvoir le construire aisément.

$$\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{BC} \iff \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB}$$

2. Transformer l'égalité qui définit le point G afin de pouvoir le construire aisément.

   On utilise la relation de Chasles en introduisant le point B :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$$

ce qui donne :

$$3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{0}$$

Et donc :

$$3\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}$$

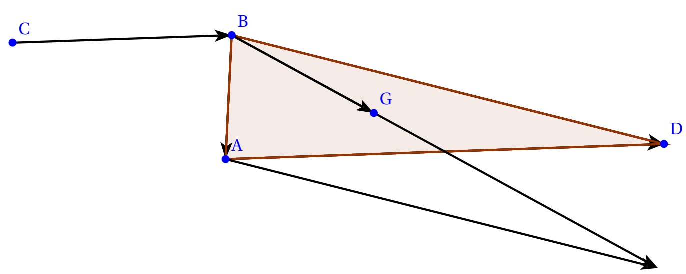
Par suite :

$$\overrightarrow{GB}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}}{3}$$

Au final :

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{3}$$

3. Réaliser une figure.



4. Que peut-on dire du quadrilatère CDBA. Justifier.
Puisque $\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{BC}$ alors les droites (DA) et (BC) sont parallèles, il vient que le quadrilatère CDBA est un trapèze.

5. On note C′ le milieu du segment [AD]
   (a) Montrer que :

$$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC'}$$

On sait que $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{3}$
Or, d'après la relation de Chasles on a :

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'A} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'D}$$

D'où :

$$\overrightarrow{BG}=\frac{\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'D}}{3}=\frac{2\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'D}}{3}$$

Puisque C′ est le milieu du segment [AD] on a $\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'D}=\vec{0}$ d'où :

$$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC'}$$

   (b) Que peut-on en déduire sur les points B, G et C′ ?

Puisque $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC'}$ on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BC'}$ sont colinéaires et donc que les points B, G et C′ sont alignés.

(c) En déduire aussi la position du point G.

Puisque $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC'}$, G se situe au deux-tiers de la médiane du triangle ABD issue de B, donc G est le centre de gravité du triangle ABD.