∽ DEVOIR MAISON 1 ET CORRECTION ∾
DIVISIBILITÉ

Problème :
Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Solution : Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \exists k \in \mathbb{Z} \text{tel que :} n(n+1)(2n+1) = 6k$$

– ***Initialisation*** : Pour $n = 0$:

$$0(0+1)(2\times 0+1) = 0 = 6\times 0$$

La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

– ***Hérédité*** : Supposons que pour un entier n $\mathscr{P}(n)$ soit vraie i.e qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$n(n+1)(2n+1) = 6k$$

On aimerait démontrer que dans ce cas qu'il existe un autre entier relatif k' tel que :

$$(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = 6k' \Longleftrightarrow (n+1)(n+2)(2n+3) = 6k'$$

$$(n+1)(n+2)(2n+3) = (n^2+2n+n+2)(2n+3) = (n^2+3n+2)(2n+3) = 2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6 = 2n^3+9n^2+13n+6 \quad \text{ég. 1}$$

De plus on a supposé que :

$$n(n+1)(2n+1) = 6k \Longleftrightarrow (n^2+n)(2n+1) = 6k \Longleftrightarrow 2n^3+n^2+2n^2+n = 6k \Longleftrightarrow 2n^3+3n^2+n = 6k$$

Reprenons l'égalité 1 :

$$(n+1)(n+2)(2n+3) = 2n^3+9n^2+13n+6 = (2n^3+3n^2+n)+(6n^2+12n+6) = 6k+6n^2+12n+6 = 6(k+n^2+2n+1)$$

Puisque $k' = k+n^2+2n+1 \in \mathbb{Z}$ on a démontré que $(n+1)(n+2)(2n+3)$ est un multiple de 6 dès que $n(n+1)(2n+1)$ en est un.
La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1)(2n+1) \quad \text{est un multiple de 6}$$