DEVOIR MAISON 1 : LE NOMBRE D'OR

Exercice 1. **Le nombre d'or**

On appelle nombre d'or le nombre noté φ défini par :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1. Montrer que $\varphi^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2^2} \\
&= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \\
&= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{2(3+\sqrt{5}}{2\times 2} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

2. Montrer que $1+\varphi = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$1+\varphi = 1+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

3. En déduire que le nombre d'or est une solution de l'équation :

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \text{(E)}$$

D'après les questions 1. et 2. on a :

$$\varphi^2 = 1+\varphi \iff \varphi^2 - 1 - \varphi = 0 \iff \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ainsi φ est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice 2. **Le rectangle d'or**

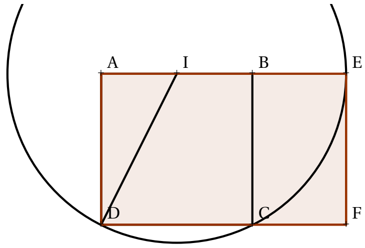
On dit qu'un rectangle est d'or si et seulement si le rapport de sa longueur sur sa largeur vaut φ, le nombre d'or i.e :

$$\frac{L}{\ell} = \varphi$$

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Tracer un carré ABCD tel que AB = 2 (l'unité est celle de votre choix).
- Placer le milieu I du segment AB.
- Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre I passant par D.
- Prolonger le côté [AB] et noté E le point d'intersection entre (AB) et $\mathscr{C}$.
- Tracer, en rouge, le rectangle dont la longueur est le côté [AE] et la largeur le côté [AD].

Conjecture : Nous prétendons que le rectangle ainsi construit est d'or.



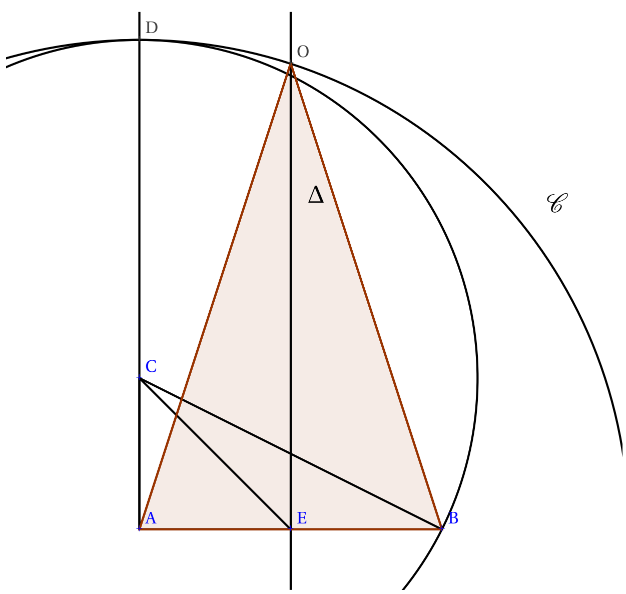
1. Montrer que $ID = \sqrt{5}$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en A, on a :
   $$ID^2 = AD^2 + AI^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Longrightarrow ID = \sqrt{5}$$
2. En déduire la longueur AE, puis conclure que :
   $$\frac{AE}{AD} = \varphi$$
   Par construction $AE = AI + ID = 1 + \sqrt{5}$, ainsi :
   $$\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Exercice 3. **Le triangle d'or**

On dit qu'un triangle isocèle est d'or si et seulement si le rapport de sa plus grande longueur sur sa plus petite longueur vaut φ (le nombre d'or).

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Tracer un triangle rectangle isocèle en A, AEC avec $AE = AC = 1$ (l'unité est celle de votre choix).
- Construire le point B symétrique de A par rapport à E.
- Tracer [CB], puis reporter la longueur CB sur la demi-droite [AC) afin d'obtenir le point D. (on a ainsi $AD = AC + CB$.)
- Tracer la médiatrice Δ du segment [AB].
- Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par D. O est le point d'intersection entre Δ et $\mathscr{C}$.
- Tracer en jaune le triangle ABO, que nous prétendons être d'or.



1. Montrer que $CB = \sqrt{5}$. En déduire que $AO = 1 + \sqrt{5}$.
   Le triangle ABC est rectangle en A, ainsi d'après le théorème de Pythagore :
   $$CB^2 = AB^2 + AC^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Longrightarrow CB = \sqrt{5}$$
   AO et AD sont deux rayons de $\mathscr{C}$, par conséquent $AO = AD$, de plus $AD = AC + CD = 1 + CB = 1 + \sqrt{5}$ puisque $CD = CB$. on obtient donc :
   $$AO = 1 + \sqrt{5}$$

2. En déduire que $\frac{AO}{AB} = \varphi$.

On sait que AB = 2, en utilisant la question précédente on obtient directement :

$$\frac{A0}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

3. Dans le triangle AEO, en utilisant la trigonométrie et votre calculatrice, trouver la valeur de l'angle $\widehat{EAO}$, et en déduire la valeur de chacun des angles du triangles ABO.

Dans le triangle rectangle EAO, rectangle en E on a :

$$\cos(\widehat{EAO}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{EA}{AO} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

Or,

$$\widehat{EAO} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) = 72^\circ$$

Le triangle ABO est isocèle, par conséquent :

$$\widehat{EAO} = \widehat{EBO} = 72^\circ$$

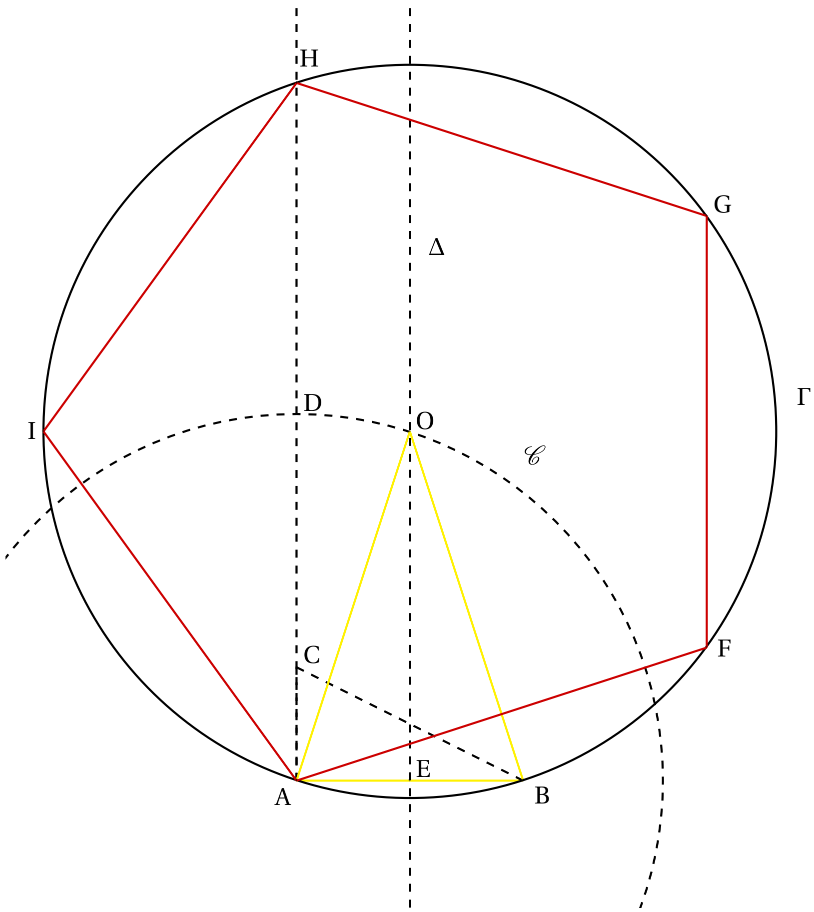
Enfin, comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, on a :

$$\widehat{AOB} = 180 - 72 - 72 = 36^\circ$$

Exercice 4. **Le pentagone régulier**

Protocole de construction : Sur une feuille blanche, effectuer les constructions suivantes :

- Reproduire la figure de l'exercice précédent i.e un triangle d'or, noté comme dans l'exercice précédent ABO.
- Tracer le cercle Γ de centre O passant par A.
- Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B passant par A. Il coupe Γ en F.
- Tracer le segment [AF], puis tracer le cercle de centre F passant par A. Il coupe Γ en G. Tracer le segment [FG].
- Tracer le cercle de centre G passant par F qui coupe Γ en H. Tracer [GH].
- Enfin tracer le cercle de centre H passant par G, il coupe Γ en I. Tracer [HI] et [IA]. Nous prétendons que AFGHI est un pentagone régulier inscrit dans Γ i.e que tous ses côtés font la même longueur.



1. Donner la mesure des angles $\widehat{AOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$, $\widehat{HOI}$ et enfin $\widehat{IOA}$.

   On a :
   $$\widehat{AOF} = \widehat{AOB} + \widehat{BOF}$$
   D'après l'exercice 3, on sait que $\widehat{AOB} = 36°$, de plus par construction $\widehat{BOF} = \widehat{AOB} = 36°$, on conclut que :
   $$\widehat{AOF} = 72°$$
   Par construction les angles $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$ et $\widehat{HOI}$ sont tous trois égaux à $\widehat{AOF}$, par conséquent :
   $$\widehat{AOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOI} = 72°$$
   Enfin il reste à vérifier que $\widehat{IOA} = 72°$. La somme des angles $\widehat{AOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$, $\widehat{HOI}$ et enfin $\widehat{IOA}$ vaut 360°, par conséquent :
   $$\widehat{IOA} = 360 - 4 \times 72 = 360 - 288 = 72°$$

2. Expliquer pourquoi AFGHI est un pentagone régulier.

   D'après la question précédente :
   $$\widehat{AOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOH} = \widehat{HOI} = \widehat{IOA} = 72°$$
   Ainsi comme le pentagone est inscrit dans un cercle de centre O, il vient que AF = FG = GH = HI = IA i.e que le pentagone AFGHI est régulier.

Question :

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{OAB}$. L'intersection entre cette bissectrice et (OB) est noté J. Expliquer pourquoi JAB est encore un triangle d'or.

Dans le triangle BJA, on sait que :

$$\widehat{JBA} = 72° \qquad \text{et} \qquad \widehat{JAB} = \frac{72}{2} = 36°$$

Ainsi $\widehat{BJA} = 180 - 72 - 36 = 72°$.
JAB est donc un triangle isocèle en A. Les angles étant égaux au triangle OAB on peut en déduire que les deux triangles sont proportionnels, et que le rapport $\frac{\text{plus grand côté}}{\text{plus petit côté}}$ est égal à φ pour les deux triangles. JAB est donc aussi un triangle d'or.