

♣ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 10 ♣ MATRICE - SAUT DE PUCE

Exercice 1.



Deux familles de puces sautent simultanément sur deux marches consécutives d'un escalier.

A chaque saut, $1/5^e$ des puces situées sur la marche 1 réussit à monter sur la marche 2. En revanche, à chaque saut, $3/10^e$ des puces de la marche 2 redescendent sur la marche 1.

1. Ecrire la matrice M de transition pour un saut donnant les fréquences de passage d'une marche à l'autre. (Chaque colonne correspond à une même marche de départ et chaque ligne à une même marche d'arrivée).

$$M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

2. On sait qu'au départ il y a seulement 40 puces sur la marche 1 et 1000 sur la marche 2. On note P_0 le vecteur colonne donnant cette répartition par marche :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le nombre de puces sur chaque marche après 1 saut ; écrire le résultat sous la forme d'une matrice colonne P_1 .

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 + 300 \\ 8 + 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 332 \\ 708 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer la répartition du nombre de puces après 2 sauts et 3 sauts. Ecrire les opérations comme un produit de matrice.

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 332 \\ 708 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 478 \\ 562 \end{pmatrix}$$

Après deux sauts il y a 478 puces sur la marche 1 et 562 sur la marche 2.

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 478 \\ 562 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 551 \\ 589 \end{pmatrix}$$

Après trois sauts il y a 551 puces sur la marche 1 et 589 sur la marche 2.

3. Que se passe-t-il si au départ il y a 600 puces sur la marche 1 et 400 sur la marche 2 ?

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 + 120 \\ 120 + 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Après le premier saut les puces sont répartis comme à l'instant initial. Et par conséquent après chaque saut il y a 600 puces sur la marche 1 et 400 sur la marche 2.