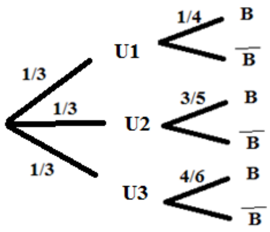
Correction du Bac Blanc

Exercice 1 QCM



Q1. Par définition, $P_B(U_1)=\dfrac{P(B\cap U_1)}{P(B)}$. On construit un arbre de probabilité (ci-contre).

D'après la formule des probabilités totales, $P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{91}{180}$.

De plus $P(B\cap U_1)=\dfrac{1}{12}$. Donc $P_B(U_1)=\dfrac{15}{91}$. **Réponse B.**

Q2. Soit T la variable aléatoire qui désigne la durée de vie de cet appareil. Sachant que T suit une loi exponentielle de paramètre λ, son espérance est $1/\lambda$.

On cherche donc $P(T\geq\dfrac{2}{\lambda})=1-P(T<\dfrac{2}{\lambda})=1-\int_0^{2/\lambda}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{2/\lambda}=1-\left(-e^{-2}+1\right)=e^{-2}$. **Réponse B.**

Q3. $\vec{n}(-3;-5;1)$ est normal au plan (P) et $\vec{u}(1;1;2)$ dirige la droite Δ.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc Δ n'est pas perpendiculaire à (P). $\vec{n}\,.\,\vec{u}=-6\neq 0$ donc la droite Δ n'est ni incluse ni parallèle au plan (P). En conclusion, la droite Δ et le plan (P) sont sécants. **Réponse C.**

Exercice 2

Partie A Q1. La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, $g'(x)=6x^2+2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{6x^3+2}{x}>0$. Donc g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Q2. On démontre très simplement que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. De plus, la fonction g est strictement croissante et continue sur $]0;+\infty[$. D'après le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution α sur $]0;+\infty[$. A l'aide du tableur, on détermine que $\alpha\approx 0,86$, valeur arrondie au centième près.

Q3. La fonction g est croissante strictement sur $]0;+\infty[$ et s'annule en α.

On en déduit que $g(x)$ est négative sur $]0;\alpha[$ et que $g(x)$ est positive sur $]\alpha;+\infty[$.

Partie B] Q1.

$\lim\limits_{x\to 0} -\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$; $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\ln x}{x^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln x}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Q2. Pour tout $x>0$, $2x-f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Pour tout $0<x<1$, $2x-f(x)<0$ et pour tout $1<x$, $2x-f(x)>0$.

Donc la courbe (C) est au dessus de la droite Δ sur $]0;1[$ et en dessous de la droite Δ sur $]1;+\infty[$.

Q3. f, bien définie sur $]0;+\infty[$, est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, $f'(x)=2-\dfrac{x-2x\ln x}{(x^2)^2}=\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

Sachant que pour tout $x>0$, $x^3>0$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Q4. Tableau de variations de f

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C] Q1. D’après la question B]2, la courbe C est en dessous de la droite Δ sur l’intervalle $[1;n]$.

De plus, sur cet intervalle, les deux fonctions $x \mapsto 2x$ et f sont continues.

L’aire exprimée en u.a. du domaine D est donc donnée par $\int_1^n [2x - f(x)]\,dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = I_n$.

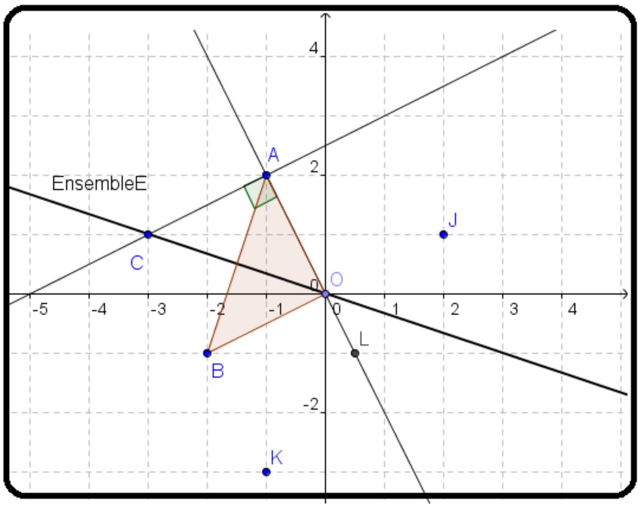
Q2. a. La fonction $h : x \mapsto -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

et pour tout $x > 0$, $h'(x) = -\frac{1-\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$. On en déduit que h est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

b. $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} - (0-1) = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$

Q3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$

Exercice 3



Q1. Voir figure ci-contre.

Q2. $|a| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

et $|b| = |-2-i| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

Donc OA = OB et le triangle OAB est isocèle en O.

Q3. $AB = |b-a| = |-2-i+1-2i| = |-1-3i|$

D’où $AB = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$.

Q4. $\frac{b}{a} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{2+4i+i-2}{1+4} = \frac{5i}{5} = i$

donc $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg(i)\ \ (2\pi) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

Q5. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{b}{a}\right)(2\pi) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$. On conclut donc que OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

Q6.a. $z' = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$ donc $c' = \frac{c+1-2i}{c+2+i} = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{b}{a} = i$. C’est donc le point d’affixe i.

b. Pout tout $z \neq b$, $|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-a| = |z-b| \Leftrightarrow AM = BM$

On en déduit que M appartient à l’ensemble (E) si et seulement si M est équidistant des points A et B , c'est-à-dire si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment [AB]. L’ensemble (E) est donc la médiatrice du segment [AB].

c. OA = OB donc O appartient bien à la médiatrice du segment [AB].

$|c'| = |i| = 1$ donc C appartient aussi à l’ensemble (E). Cette droite est donc simplement la droite (OC).

Q7.a. $j = e^{-i\frac{\pi}{2}} a = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right](-1+2i) = (0-i)(-1+2i) = i+2$

De même, $k = e^{i\frac{\pi}{2}} c = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right](-1+2i) = (0+i)(-3+i) = -1-3i$

b. Affixe du milieu L du segment [JK] : $l = \frac{j+k}{2} = \frac{1}{2} - i$.

c. (OL) est hauteur du triangle OAC issue de O si, et seulement si, (OL) est perpendiculaire à (AC).

$Z_{\overrightarrow{OL}} = l - 0 = 0,5 - i$ et $Z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = -3 + i - (-1+2i) = -2 - i$

On en déduit que $\overrightarrow{OL} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,5 \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0$: ainsi (OL) est bien perpendiculaire à (AC), ce qui en fait la hauteur du triangle AOC issue de O.