Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

DEVOIR COMMUN N° 4 (4H)

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point.
Pour chaque question, le candidat entourera sur le sujet la réponse choisie.

1. On dispose de trois urnes contenant chacune un certain nombre de boules colorées, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.
On tire au hasard une urne, puis une boule de cette urne.
La boule tirée est bleue, mais quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

	Boules Bleues	Boules Rouges
Urne 1	1	3
Urne 2	3	2
Urne 3	4	2

a. $\frac{27}{80}$ **b.** $\frac{15}{91}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{3}$

2. La durée de vie d'un appareil suit une loi exponentielle de paramètre λ.
La probabilité que cet appareil ait une durée de vie supérieure ou égale au double de son espérance est

a. $e^{-\frac{2}{\lambda}}$ **b.** e^{-2} **c.** $1-e^{\lambda}$ **d.** $e^{-\lambda}$

3. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point D$(-1\,;\,2\,;\,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(-3\,;\,-5\,;\,1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 2 : **Commun à tous les candidats** **5 points**

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Soit Δ le droite d'équation $y = 2x$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie C :

Soit n un entier naturel non nul. On considère I_n l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$\text{I}_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour tout réel $x > 0$ on définit la fonction h par $h(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$
   - **a.** Calculer $h'(x)$ pour tout $x > 0$
   - **b.** En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : **Commun à tous les candidats** **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera sur la feuille de papier millimétré (fournie en annexe 1) une figure en prenant pour unité graphique 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.
On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2\text{i} \quad ; \quad b = -2 - \text{i} \quad ; \quad c = -3 + \text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $|a|$ et $|b|$.
   Que peut-on en déduire pour le triangle OAB ?
3. Calculer AB.
4. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{b}{a}$.
   En déduire un argument de $\dfrac{b}{a}$
5. En déduire la nature du triangle OAB.
6. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M$'$ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2\text{i}}{z + 2 + \text{i}}$$

   a. Calculer l'affixe c' du point C$'$, image de C par f et placer le point C$'$ sur la figure.
   b. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment [AB].
   c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.
7. On considère les points J et K d'affixes respectives j et k définies par :

$$j = e^{-i\frac{\pi}{2}}a \qquad \text{et} \qquad k = e^{i\frac{\pi}{2}}c$$

   On note L le milieu de [JK].
   a. Donner la forme algébrique des nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, en déduire la forme algébrique de j puis celle de k. Placer J et K.
   b. On note ℓ l'affixe du point L, d'éterminer ℓ.
   c. Démontrer que la droite (OL) est la hauteur issue de O du triangle OAC.

Exercice 4 : **Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis contruire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n on a $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}} + 1$

   c. Démontrer alors les deux conjectures de la question 1.b)

3. Fabrice veut construire un algorithme qui saisit un nombre réel M strictement supérieur à 1 et qui renvoie le premier terme de la suite (u_n) tel que $u_n < \text{M}$ ainsi que son rang.
   L'algorithme proposé par Fabrice est donné ci-contre.

   a. Fabrice a commis une erreur.
   Justifier que son algorithme tourne indéfiniment si on saisit en entrée M = 2

   b. Modifier l'algorithme afin qu'il réponde à la demande de Fabrice.

   c. Quel rang sera alors affiché en sortie si on saisit M = 1,01 ?

Algorithme 1 :

Variable(s) :
u est un nombre réel
n est un entier naturel

Entrée(s) :
Saisir un nombre réel M > 1

Traitement :
$n \longleftarrow 0$
Tant que $(u > \text{M})$ **Faire**
  $u \longleftarrow 5$
  $u \longleftarrow \dfrac{4u-1}{u+2}$
Fin Tant que

Sortie(s) :
Afficher u
Afficher n

Attention, pensez à regarder la suite, il y a 5 exercices !!

Exercice 4 : Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.
L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

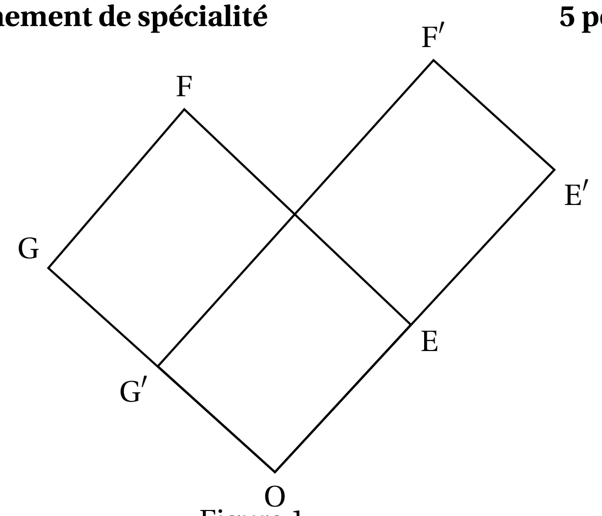


Figure 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2 ; 2)$, $(-1 ; 5)$ et $(-3 ; 3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x ; y)$ du plan le point $M'(x' ; y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ y' & = & \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{array}\right.$$

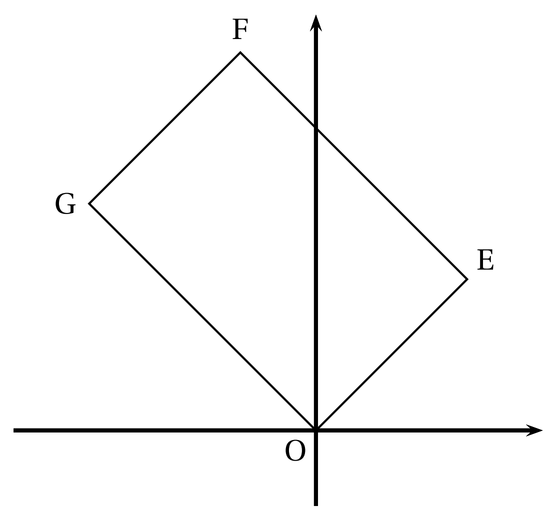


Figure 2

1. **a.** Calculer les coordonnées des points E′, F′ et G′, images des points E, F et G par cette transformation.
   b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $\mathrm{E}_n\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du plan par $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right)$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ du point E_n vérifient :

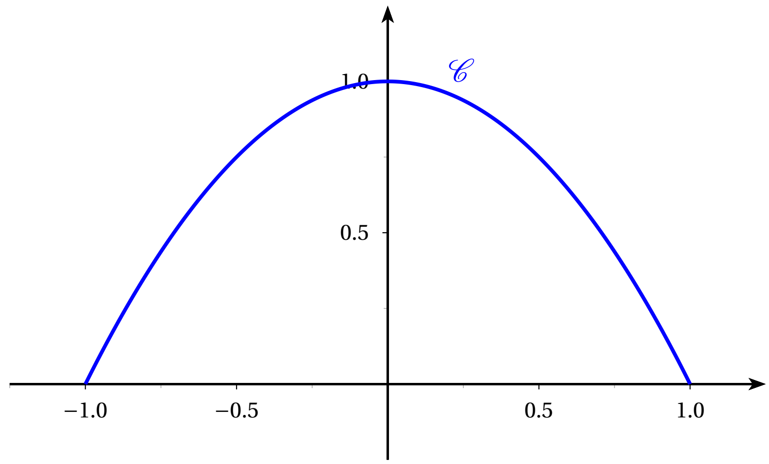
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{A}^n\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : **Commun à tous les candidats** **2 points**

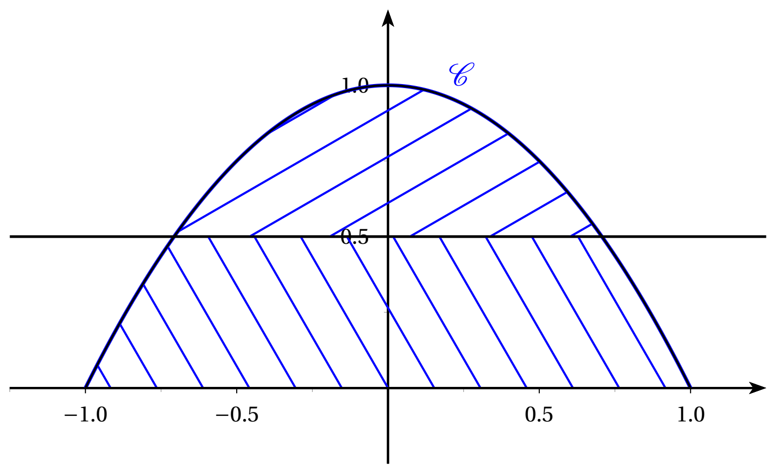
Dans ce problème, toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans la correction.

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = 1 - x^2$
Cette fonction est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé ci-contre.



On souhaite couper le domaine délimité par la courbe et l'axe des abscisses à l'aide d'une droite « horizontale » en deux domaines d'aires égales.

Comment procéder ?



Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Annexe 1 (Exercice 2) à rendre avec la copie

Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Annexe 2 (Exercice 3 de non spécialité) à rendre avec la copie