∽ CORRECTION ∽
DEVOIR COMMUN N° 4 (2H)

Exercice 1 : **Communs à tous les candidats** **10 points**

1. **a.** $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ -8\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{AC}(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, dont les trois points distincts A, B et C définissent un plan.

   b. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2-8+6 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3-3 = 0$.
   Le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est donc un vecteur normal au plan (ABC).

   c. On sait que $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff 1x+1y-3z+d = 0$.
   En particulier $C(2\ ;\ 2\ ;\ 2) \in (ABC) \iff 1\times 2+1\times 2-3\times 2+d = 0 \iff d = 2$.
   Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff x+y-3z+2 = 0$.

2. **a.** Le vecteur $\vec{p}(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (P).
   Or $\vec{n}$ et $\vec{p}$ ne sont pas colinéaires, ce qui signifie que les plans (ABC) et P ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

   b. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in D \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z+2 &=& 0 \\ x-y+z-4 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 3t-2 \\ x-y &=& -t+4 \quad (1) \\ z &=& t \end{array}\right.$

   $\Rightarrow 2x = 2t+2 \iff x = t+1$.
   En remplaçant dans l'équation (1) $y = x+z-4 = z+1+z-4 = 2t-3$.

   Finalement : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in D \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+1 \\ y &=& 2t-3 \\ z &=& t \end{array}\right.$

3. **a.** Le point de D correspondant à $t = 1$ est le point I.

   b. Calculons $\Omega I^2 = (2-3)^2+(-1-1)^2+(1-3)^2 = 1+4+4 = 9$, donc $\Omega I = 3$: le point I appartient à la sphère S.

   c. Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S si et seulement si $\Omega M^2 = 9 \iff (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 9$.
   Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à D et à S si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations :
   $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+t \\ y &=& -3+2t \\ z &=& t \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 &=& 9 \end{array}\right. \Longrightarrow (1+t-3)^2+(-3+2t-1)^2+(t-3)^2 = 9$

   $\iff t^2+4-4t+4t^2+16-16t+t^2+9-6t = 9 \iff 6t^2-26t+20 = 0 \iff 3t^2-13t+10 = 0$.
   On sait que I appartient à S donc $t = 1$ est une des des solutions de l'équation du second degré.
   Or $3t^2-13t+10 = (t-1)(3t-10)$; donc l'autre solution est donnée par $3t-10 = 0 \iff t = \dfrac{10}{3}$, valeur du paramètre qui conduit à $J\left(\dfrac{13}{3}\ ;\ \dfrac{11}{3}\ ;\ \dfrac{10}{3}\right)$.

Exercice 2 : **Commun à tous les candidats** **10 points**

Partie A

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^x = +\infty$, donc, par opérations $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x+e^x$. Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^x = 0$, donc, par opérations $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x) = 0$.

2. Pour tout réel $x, f'(x) = 1e^x+(x+1)e^x = (x+2)e^x$.

3. Pour tout réel x, $\text{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-1/\text{e}^2$	↗	$+\infty$

Partie B

1. a. On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\text{e}^x \\ &\iff (x+1)\text{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :

— si $m < -\dfrac{1}{\text{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas $(\text{O}x)$;

— si $m = -\dfrac{1}{\text{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe $(\text{O}x)$ en un point ;

— si $-\dfrac{1}{\text{e}^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe $(\text{O}x)$ en deux points ;

— si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe $(\text{O}x)$ en deux points.

2. — La courbe 1 ne coupe pas l'axe $(\text{O}x)$, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\dfrac{1}{\text{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\text{e}$.

— La courbe 2 coupe l'axe $(\text{O}x)$ une seule fois, donc $m = -\dfrac{1}{\text{e}^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.

— Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = \text{e}$.

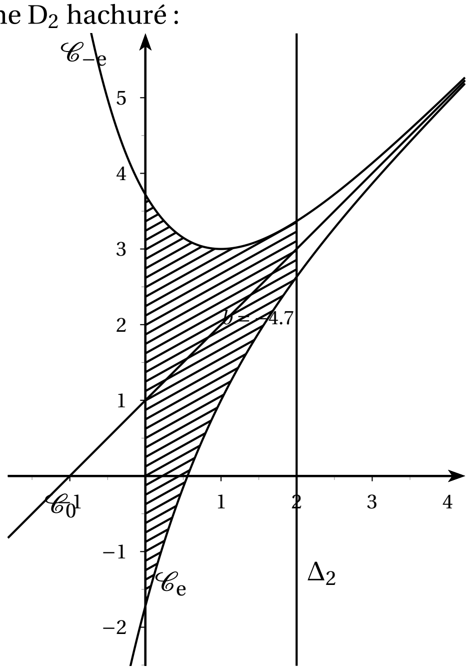
3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\text{e}^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :

— si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;

— si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;

— si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :



a.

b. Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-\text{e}}$ est au dessus de $\mathscr{C}_\text{e}$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(a) &= \int_0^a f_{-\text{e}}(x) - f_\text{e}(x)\text{d}x \\ &= \int_0^a \left((x+1) + \text{e}\text{e}^{-x}\right) - \left((x+1) - \text{e}\text{e}^{-x}\right)\text{d}x \\ &= \int_0^a 2\text{e}\text{e}^{-x}\text{d}x \\ &= 2\text{e}\left[-\text{e}^{-x}\right]_0^a \\ &= 2\text{e}\left(-\text{e}^{-a} + 1\right) \\ &= 2\text{e} - 2\text{e}^{1-a}. \end{aligned}$$

On a de plus $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \text{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2\text{e}$.