Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Devoir Commun n° 4 (2h)

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **10 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ et C $(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

Exercice 2 : **Commun à tous les candidats** **10 points**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en **annexe** les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).

   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. **a.** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$.
   Hachurer D_2 sur **l'annexe**.

   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Annexe, Exercice 2