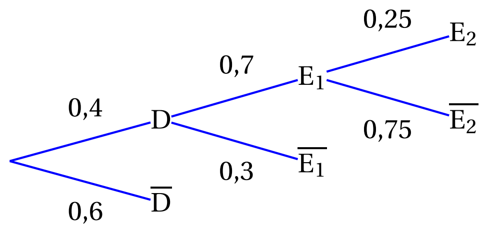
ൟ Correction ൟ
Devoir Commun n° 4 (4h)

Exercice 1 : Commun à tous les candidats **5 points**

1. **a.** **(1 point)**



b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. **(1 point)**

c. Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit : **(1 point)**

$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$.

Ou encore, on peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :

$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$. D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. **a.** On repète donc n fois de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli de Succès « le candidat est recruté », de probabilité 0.07.
La variable X compte de nombre de succès du schéma de Bernoulli correspondant.
Elle suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 0,07$. **(1 point)**

b. On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près **(1 point)**

Bonus On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln)

$\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.

Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat. **(1 point)**

Exercice 2 : Communs à tous les candidats **5 points**

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a. $z_M = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$. **(0.5 point)**

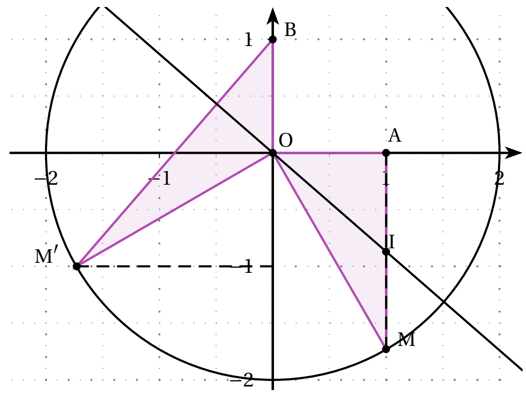
b. $z_{M'} = -iz_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$. **(0.5 point)**

c. **Méthode algébrique :** $|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ **(1 point)**

On cherche θ un argument de $z_{M'}$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ On reconnaît $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

Ou encore, par la forme exponentielle : $|z_{M'}| = |-i| \times |z_M| = 1 \times |2e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 2$

Et $\arg(z_{M'}) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$ (module 2π).



d. La figure n'est pas à l'échelle. **(0.5 point)**
Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.

2. Cas général en prenant $z_{\text{M}} = x + \text{i}y$ avec $y \neq 0$.

a. $z_{\text{I}} = \dfrac{z_{\text{A}} + z_{\text{M}}}{2} = \dfrac{x+1}{2} + \text{i}\,\dfrac{y}{2}$. **(0.5 point)**

b. $z_{\text{M}'} = -\text{i}(x + \text{i}y) = y - \text{i}\,x$. **(0.5 point)**

c. $\text{I}\left(\dfrac{x+1}{2}\ ;\ \dfrac{y}{2}\right)$, $\text{B}(0\ ;\ 1)$ et $\text{M}'(y\ ;\ -x)$. **(0.5 point)**

d. $\overrightarrow{\text{OI}} \cdot \overrightarrow{\text{BM}'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\dfrac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$
Donc (OI) et (BM′) sont perpendiculaires. **(0.5 point)**

e. $\text{BM}' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ **(0.5 point)**

et d'autre part, $2\text{OI} = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc $2\text{OI} = \text{BM}'$

<u>Exercice 3</u> : Communs à tous les candidats **6 points**

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre −1 et 0, l'autre entre 0 et 1. **(0.25 point)**

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1 + x$. **(0.5 point)**

— $x^2 + x^3 = 0$ pour $x \in \{-1\ ;\ 0\}$.

— $x^2 + x^3 > 0$ pour $x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

— $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]-\infty\ ;\ -1[$.

b. x solution de (E) $\iff \text{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right) \iff x^2 + x^3 = \dfrac{\text{e}^x}{3}$. **(0.5 point)**
Or, pour tout réel x, $\dfrac{\text{e}^x}{3} > 0$, alors que $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in]\infty\ ;\ -1[$.
Donc (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.

c. $\text{e}^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0$. Donc 0 n'est pas solution de (E). **(0.25 point)**

2. $\forall x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, (E) **(0.5 point)**

$$
\begin{aligned}
&\iff \text{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right) & & \\
&\iff \ln \text{e}^x = \ln\left(3\left(x^2 + x^3\right)\right) & & a = b \iff \ln a = \ln b \\
&\iff x = \ln 3 + \ln\left(x^2(1+x)\right) & & \ln(ab) = \ln a + \ln b \\
&\iff x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) & & \\
&\iff \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0 & & \\
&\iff h(x) = 0 & &
\end{aligned}
$$

3. **a.** — Limite en -1 **(1 point)**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-1} \ln 3 - x = \ln 3 + 1 \\ \lim\limits_{x\to-1} \ln(x^2) = \lim\limits_{X\to1} \ln X = 0 \\ \lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = \lim\limits_{X\to0} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-1} h(x) = -\infty$$

— Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} \ln 3 - x = \ln 3 \\ \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \ln X & = & -\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0} \ln x^2 = -\infty \\ \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to0} 1+x & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln X & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0} \ln(1+x) = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to0} h(x) = -\infty$$

— Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln 3 - x = -\infty \\ \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \text{on a la F.I. « } +\infty-\infty \text{ »}$$

$$h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\frac{2\ln x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right).$$

Or

— $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$

— $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$

— Pour tout $x > 1, 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x+1} < \dfrac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$

Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

b. h est une somme et composée de fonctions dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.

Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = 0 + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)}$

On a bien : $h'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$. **(0.75 point)**

c. Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée. **(0.75 point)**

Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.

Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1 > 0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).

Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1 > 0$, d'où le signe...

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0	α_1	$1+\sqrt{3}$	α_2	$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(x+1)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de $h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$h(1-\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	0 ↗	$h(1+\sqrt{3})$	↘ 0	↘ $-\infty$

Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

d. — Sur l'intervalle $]-1~;~0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1~;~0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.

— Sur l'intervalle $]0~;~1+\sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au moins une solution sur $\left[0~;~1+\sqrt{3}\right[$. Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.

La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.

0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\alpha_1 \in [0,61~;~0,62]$.

On trouve de même que $0,618 < \alpha_1 < 0,619$

Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc $0,62$.

— Comme $h(1+\sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau. **(1.25 point)**

Avec la calculatrice, on trouve $7,12$ comme valeur approchée de α_2, arrondie au centième.

e. Notre conjecture est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !
La seconde n'était pas visible sur le graphique, il est donc logique que nous ne l'ayons pas conjecturer.
La première que nous avions vue n'en était en fait pas une, car les courbes semblaient se frôler à cette échelle, mais si on zoome, on peut voir qu'en fait elles ne se touchent pas. **(0.25 point)**

<u>Exercice 4</u> : Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité **4 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $\quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1. **a.** **(0.25 point)**

i		1	2	3
u	1	$\sqrt{2\times 1} = \sqrt{2}$	$\sqrt{2\times\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\times\sqrt{2\sqrt{2}}}$

La valeur de u affichée pour $n = 3$ est $u = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \simeq 1.8340$ à 10^{-4} près

b. Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$. **(0.25 point)**

c. D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. **(0.25 point)**

2. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < 2$. **(1 point)**

• Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \simeq 1.4$ donc on a bien $0 < u_0 < u_1 < 2$.
La proposition est initialisée à $n = 0$.

• Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque. Montrons que : $0 < u_n < u_{n+1} < 2 \Longrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$

On a :

$$0 < u_n < u_{n+1} < 2 \overset{\times 2 > 0}{\Longleftrightarrow} 0 < 2u_n < 2u_{n+1} < 4 \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Longleftrightarrow} 0 < \sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}} < \sqrt{4} \Longleftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$$

La proposition est héréditaire à partir de $n = 0$.

• Conclusion

$0 < u_0 < u_1 < 2$

Si $0 < u_n < u_{n+1} < 2$ alors $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < 2$.

b. On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2. Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente. **(0.5 point)**

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :
$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ **(0.75 point)**

On a aussi pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2} v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **(0.5 point)**

Or, $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \iff v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) \iff \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \iff u_n = 2e^{v_n}$

c. Comme $\dfrac{1}{2} \in [-1; 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = 0$ **(0.5 point)**

On sait que la fonction exponentielle est continue en 0 et $e^0 = 1$

Alors, par composition des limites, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$

Bonus L'algorithme suivant permet d'afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$. **(1 point)**

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

Exercice 4 : Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité **4 points**

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$
$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2. **a.** « b prend la valeur $5a - 6c$ »

b. La suite semble être croissante.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prouvons par récurrence que $C_n = A^n C_0$.
C'est vrai pour $n = 0$, car A^0 est la matrice identité.
Supposons que $C_n = A^n C_0$, alors

$$C_{n+1} = AC_n = A(A^n C_0) = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$$

En conclusion, pour tout entier naturel n, on a

$$C_n = A^n C_0$$

4. $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. C'est trivialement vrai pour $n = 1$.
Supposons que $A^n = PD^nQ$, alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nQ(PDQ) = PD^n(QP)DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q$$

En conclusion, pour tout entier naturel n, non nul on a

$$A^n = PD^nQ.$$

6. Puisque $C_n = A^n C_0$, on obtiendra u_n comme la somme :

$$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3^n) = -8 \times 2^n + 8 \times 3^n + 9 \times 2^n - 6 \times 3^n = 2^n + 2 \times 3^n.$$

Les deux suites de terme général 2^n et 3^n ayant pour limite $+\infty$, il en résulte que la suite (u_n) n'a pas de limite finie, mais a une limite infinie (on dit qu'elle diverge vers $+\infty$).