Nom : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Devoir Commun n° 4 (4h)

Exercice 1 : **Commun à tous les candidats** **5 points**

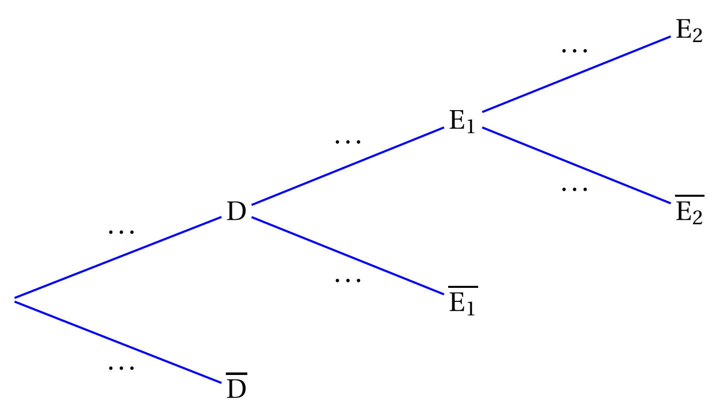
Pour sélectionner ses élèves en Master 2 de Mathématiques Pures, une faculté suit la procédure de recrutement suivante. Elle effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à une équipe d'enseignants-chercheurs.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus.

Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur de la faculté qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent au Master 2 de Mathématiques Pures de cette faculté. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.
   On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

   b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

Bonus Quel est le nombre minimum de dossiers que la faculté doit traiter pour que la probabilité de recruter au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

<u>Exercice 2</u> : Communs à tous les candidats **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $\text{i}^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\text{B}} = \text{i}$.

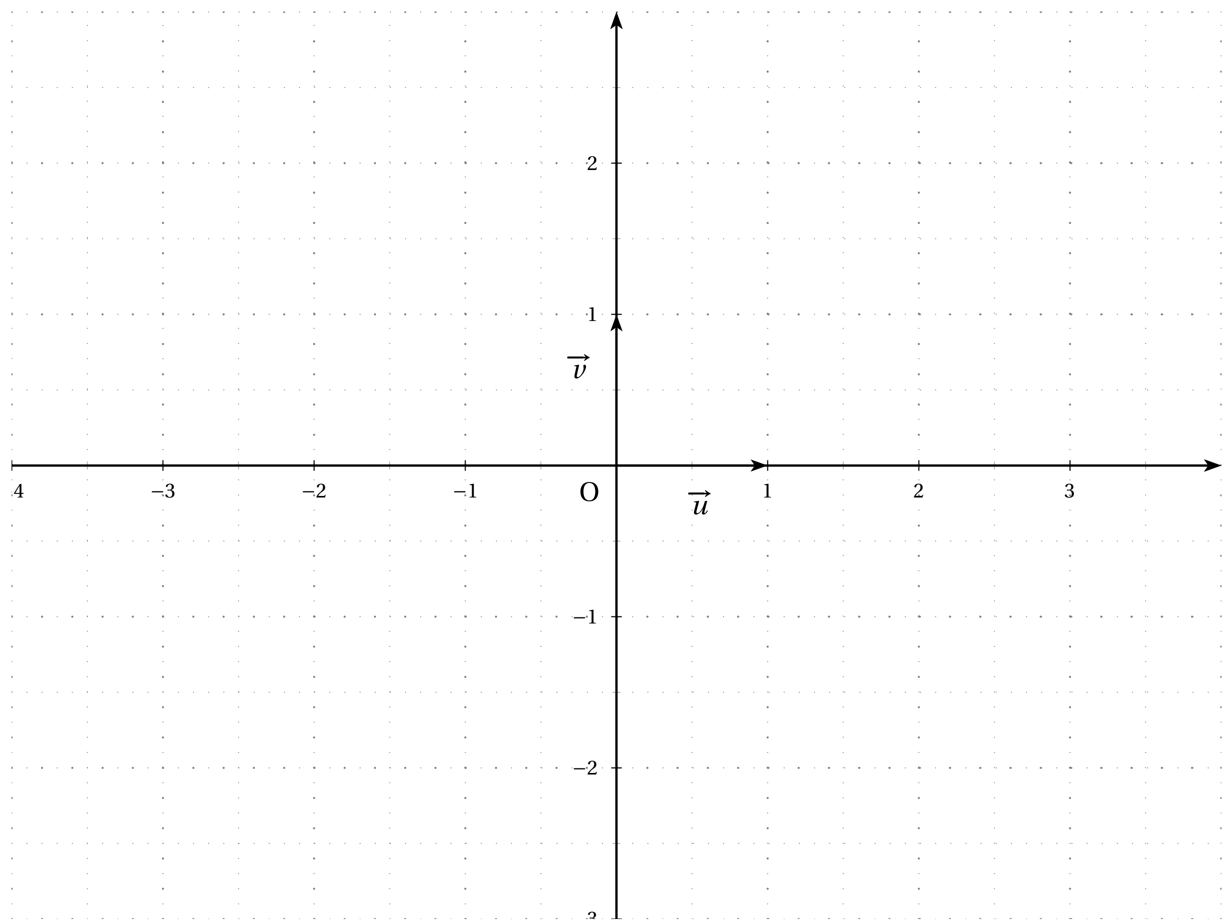
À tout point M d'affixe $z_{\text{M}} = x + \text{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{\text{M}'} = -\text{i}z_{\text{M}}$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_{\text{M}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

- **a.** Déterminer la forme algébrique de z_{M}.
- **b.** Montrer que $z_{\text{M}'} = -\sqrt{3} - \text{i}$.
- **c.** Déterminer le module et un argument de $z_{\text{M}'}$.
- **d.** Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ ci-dessous.



Tracer la droite (OI) et vérifier graphiquement les propriétés 1 et 2.

2. On revient au cas général en prenant $z_{\text{M}} = x + \text{i}y$ avec $y \neq 0$.

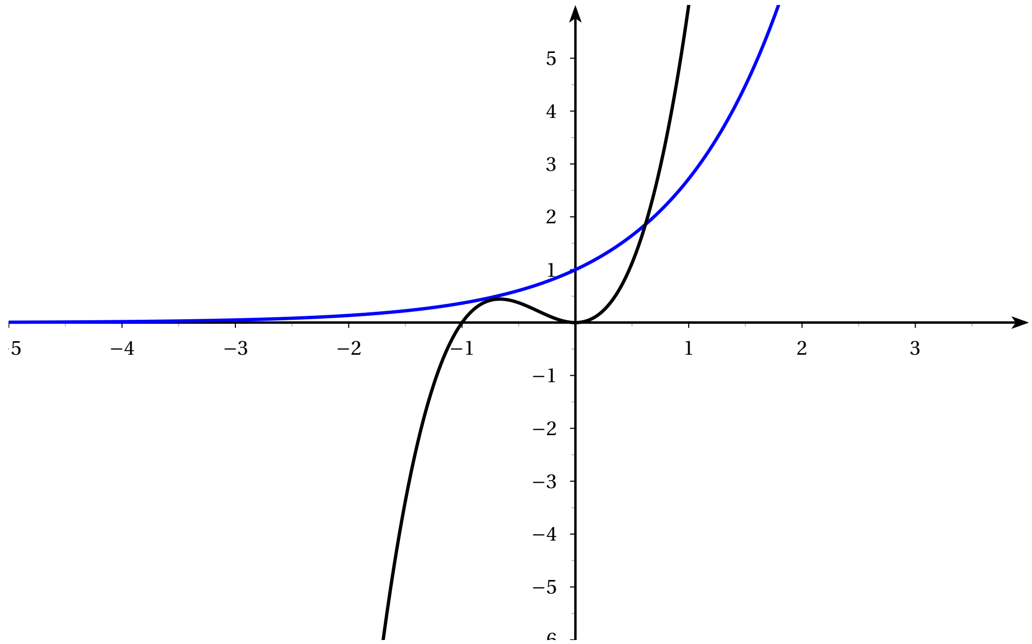
- **a.** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
- **b.** Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
- **c.** Écrire les coordonnées des points I, B et M′.
- **d.** Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.
- **e.** Montrer que BM′ = 2OI.

Exercice 3 : **Communs à tous les candidats** **6 points**

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. **a.** Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.
   b. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

   c. Déterminer les variations de la fonction h.
   On ne demande pas le détails des calculs des extrema de h. Une valeur arrondie à 10^{-2} suffira.
   d. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
4. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

<u>Exercice 4</u> : Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité **4 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme ci-contre :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Compléter en valeur exacte la trace de l'algorithme ci-dessous lorsque l'on choisit $n = 3$.

i				
u	1			

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat affiché dans ce cas.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelle**s** conjecture**s** peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < u_{n+1} < 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.
On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n, ainsi que celle de u_n en fonction de v_n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Bonus Compléter l'algorithme ci-contre par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Nom : ………………… **Prénom :** ………………… **Classe :** ……………

Exercice 4 : **Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité** **4 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 8
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur …
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

a. Compléter la ligne de cet algorithme comportant des pointillés.
On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$
Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Prouver que Q est la matrice inverse de P.

b. On admet que $A = PDQ$.
Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.
Pour tout entier naturel non nul n,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n.
La suite (u_n) a-t-elle une limite ?