# ↜ CORRECTION ↝
# DEVOIR COMMUN n° 1 (2H)

**Exercice 1** :

**1.** Il suffit de compter :

$$\begin{aligned}(2+i)(1-i)+[2(1-i)]^2+i &= 2-2i+i-i^2+4(1-i)^2+i \\ &= 2-(-1)+4(1-2i+i^2) \\ &= 3+4(-2i) = 3-8i\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\textbf{FAUX}}$

**2.** L'inverse de $\dfrac{1+i}{3-i}$ est $\dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{3-i}{1+i}\times\dfrac{1-i}{1-i} = \ldots = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$ Donc $\boxed{\textbf{VRAI}}$

**3.** On utilise la forme algébrique de $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors $\overline{z} = x - iy$ et

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2+2ixy-y^2 \\ \overline{z}^2 &= x^2-2ixy-y^2 \\ \text{Donc}\quad z^2+\overline{z}^2 &= 2(x^2-y^2) \in \mathbb{R} \quad \text{car } x, y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

**Autre méthode** si on est plus fainéant, mais intelligent : $z^2+\overline{z}^2 = z^2+\overline{z^2} = \mathrm{Z}+\overline{\mathrm{Z}}$ avec $\mathrm{Z} = z^2$.
Or ceci est trivialement un nombre réel. Donc $\boxed{\textbf{VRAI}}$

**4.** Pas nécessairement.
$(u_n)$ peut être croissante ET majorée. Dans ce cas, elle converge vers son plus petit majorant.
Par exemple, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par son terme général $u_n = -\dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée par 0, elle converge (vers 0 en l'occurence). Donc $\boxed{\textbf{FAUX}}$

**5.** Evidemment ! Prenons par exemple $u_n = 10n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. Donc $\boxed{\textbf{VRAI}}$

**Exercice 2** :

**1.** $x^2-3x-4=0$ : $\Delta = \ldots = 25$ Donc les solutions sont $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$ $\boxed{\mathscr{S} = \{-1;4\}}$

**2.** $z^4-3z^2-4=0$ : On pose $x = z^2$ et alors

$$\begin{aligned} z^4-3z^2-4=0 &\iff x^2-3x-4=0 \\ &\iff x=-1 \quad\text{ou}\quad x=4 \quad \text{d'après la question 1)} \\ &\iff z^2=-1 \quad\text{ou}\quad z^2=4 \\ &\iff z=i \quad\text{ou}\quad z=-i \quad\text{ou}\quad z=2 \quad\text{ou}\quad z=-2 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \{2, -2; i, -i\}}$

**Exercice 3** :

**1.** $\mathrm{P}(-1) = (-1)^3-3\times(-1)^2+3\times(-1)+7 = -1-3-3+7 = 0$ *Quelle surprise !* $\boxed{\mathrm{P}(-1)=0}$

**2.** On veut :

$$\begin{aligned} & (z+1)(z^2+az+b) = \mathrm{P}(z) \\ \iff\ & z^3+az^2+bz+z^2+az+b = z^3-3z^2+3z+7 \\ \iff\ & \left\{\begin{array}{l} a+1=-3 \\ b+a=3 \\ b=7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=-4 \\ b+a=3 \quad \text{OK} \\ b=7\end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{P}(z) = (z+1)(z^2-4z+7)}$

**3.** On nous demande de retrouver les solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ par le calcul, pour justifier les réponses de XCas. Or on sait que :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(z)=0 \iff (z+1)(z^2-4z+7)=0 &\iff z+1=0 \quad\text{ou}\quad z^2-4z+7=0 \\ &\iff \boxed{z=-1} \quad\text{ou}\quad \Delta = \cdots = -12 \\ & \qquad z = \frac{4-i\sqrt{12}}{2} = \cdots = \boxed{2-i\sqrt{3}} \quad\text{ou}\quad \boxed{z = 2+i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

**Exercice 4** : *Inspiré du sujet Liban 2013*

**PARTIE A :**

1. L'algorithme nº 1 devrait calculer tous les termes de $v_1$ à $v_n$ mais $v_0$ n'est pas donné donc il ne peut rien faire et plante. De plus, même avec une initialisation, il n'afficherait que le dernier $v_n$.
   L'algorithme nº 2 calcule $n$ fois de suite $v_1$ à partir de $v_0$ : il ne calcule pas les termes de 0 à $v_n$.
   **L'algorithme nº 3** calcule tous les termes de 0 à $v_n$ et les affiche tous.
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$ car il manque le dernier affichage en dehors de la boucle), il semblerait que la suite converge vers un nombre proche de 3.

**PARTIE B :** **Sens de variation de la suite** $(v_n)_{n\geq 0}$

1. Montrons par récurrence que la proposition $0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel $n$.
   $*$ Initialisation : $n = 0$,
   $v_0 = 1$ donc on a bien $0 < v_0 < 3$ . Ainsi la proposition est vraie au rang 0.

   $*$ Hérédité : Supposons qu'il existe $n \geq 0$ tel que $0 \leq v_n \leq 3$.
   Montrons alors que $0 \leq v_{n+1} \leq 3$

   $$\begin{aligned} \text{Par hypothèse, on sait que} \quad & 0 < v_n < 3 \\ \iff \quad & 0 > -v_n > -3 \\ \iff \quad & 6 > 6 - v_n > 3 \\ \iff \quad & \frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } ]0\,;\,+\infty[. \\ \iff \quad & \frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} \\ \iff \quad & \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $0 < v_{n+1} < 3$. Youpi ! L'hérédité est établie !

   $*$ Conclusion : Par le principe de récurrence, la proposition $0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel $n$.
2. **a.** $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6-v_n} - v_n = \dfrac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \dfrac{9 - 6v_n + v_n^2}{6-v_n} = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$.
   **b.** D'après la question 1., $0 < v_n < 3$ pour tout $n$ entier naturel.
   Ainsi $6 - v_n > 3 > 0$ Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$ Ainsi la suite $(v_n)$ est croissante.

**PARTIE C :** **Recherche de la limite de la suite** $(v_n)_{n\geq 0}$

1. $w_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1}-3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n} - 3} = \dfrac{1}{\frac{9-3(6-v_n)}{6-v_n}} = \dfrac{6-v_n}{3v_n - 9}$ Or $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3} \iff \ldots \iff v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3$
   Donc $6 - v_n = \cdots = 3 - \dfrac{1}{w_n}$ et $3v_n - 9 = \cdots = \dfrac{3}{w_n}$ Au final on obtient $w_{n+1} = \left(3 - \dfrac{1}{w_n}\right) \times \dfrac{w_n}{3} = w_n - \dfrac{1}{3}$
   Ainsi la suite $(w_n)$ est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.
2. $(w_n)$ est arithmétique donc pour tout $n \geq 0$ on a $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{v_0 - 3} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$.
   Et $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \cdots = \dfrac{6}{-3-2n} + 3$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{6}{-3-2n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$.