Devoir surveillé Terminale S

Exercice n°1 (**4 points**)

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Le nombre complexe $(2+i)(1-i)+\left[2(1-i)\right]^2+i$ est égal à $3-4i$.
2. L'inverse de $\dfrac{1+i}{3-i}$ est $1-2i$.
3. Pour tout nombre complexe z, $z^2+\overline{z}^2$ est réel.
4. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante alors sa limite est nécessairement $+\infty$.
5. Il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n=10$.

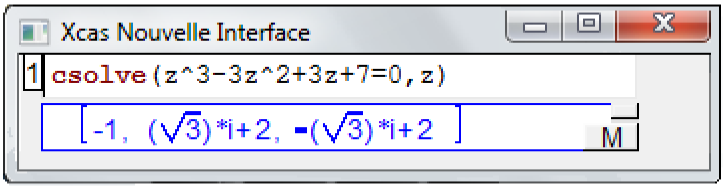
Exercice n°2 (**2 points**)

1. Résoudre l'équation $x^2-3x-4=0$.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^4-3z^2-4=0$.

Exercice n°3 (**4 points**)

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$.

1. Calculer $P(-1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.
3. On a demandé à un logiciel de calcul formel de résoudre l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.
   Démontrer les éléments de réponse fournis.



Exercice n°4 (**D'après Liban 2013 / 10 points**)

On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0=1 \\ v_{n+1}=\dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

Partie A

On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

1. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme n°1	Algorithme n°2	Algorithme n°3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n Pour i variant de 1 à n Faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ FinPour Afficher v **Fin Algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n Pour i variant de 1 à n Faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ FinPour **Fin Algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n Faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ FinPour Afficher v **Fin Algorithme**

2. Pour $n = 10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$?

Partie B Sens de variation de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $0 < v_n < 3$.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

Partie C Recherche de la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$

On considère la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que $(w_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
2. En déduire l'expression de w_n, puis celle de v_n en fonction de n.
3. A l'aide de l'expression explicite de v_n, déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.