∽ DEVOIR MAISON ∽
MÊME LE PLAN EST COMPLEXE !

Vous traiterez au moins l'un des deux premiers exercices au choix, le troisième étant obligatoire.

Exercice 1 : Pour chaque question, plusieurs réponses proposées peuvent être exactes. Justifiez vos réponses : ♠♠

1. Si $M(z)$ et $M(z')$ sont tels que $|z| = |z'|$ alors :
   - **a.** O, M et M′ sont nécessairement alignés
   - **b.** Le triangle OMM′ est isocèle
   - **c.** M et M′ sont sur un même cercle de centre O

2. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z| = 3$ est :
   - **a.** le cercle de centre O et de rayon 3
   - **b.** le cercle de diamètre [OM]
   - **c.** constitué de quatre points dont les coordonnées sont $(0;3)$, $(3;0)$, $(-3;0)$ et $(0;-3)$

3. Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors AB est égale à :
   - **a.** $|z_A - z_B|$
   - **b.** $|z_A + z_B|$
   - **c.** $|z_B - z_A|$

4. Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ avec $|z_A| = |z_B|$, alors :
   - **a.** OA = OB
   - **b.** $|\overline{z_A}| = |\overline{z_B}|$
   - **c.** AB = 0

5. Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors le point $M(z)$ tel que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est un point :
   - **a.** du cercle de diamètre [AB]
   - **b.** du segment [AB]
   - **c.** de la médiatrice de [AB]

Exercice 2 : Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse ♠♠
et donner une démonstration de la réponse choisie. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soit A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$. **Proposition :** Le triangle OAB est isocèle.
2. Soit δ l'ensemble des point M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.
   Proposition : Cet ensemble est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. **Proposition :** Pour tout entier naturel non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul. **Proposition :** Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $|i + z| = 1 + |z|$
5. Soit z un nombre complexe non nul. **Proposition :** Si $|z| = 1$, alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 3 : Pour tout point P, on convient de noter son affixe z_P. ♠

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$
   - **a.** Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 + az + b)$
   - **b.** Résoudre alors l'équation (E) (on donnera les solutions sous leur forme algébrique).
   - **c.** Ecrire ces solutions sous leur forme exponentielle.
2. On considère les points $A(-2)$, $B(1 - i\sqrt{3})$, $C(1 + i\sqrt{3})$ et D le milieu du segment [OB].
   - **a.** Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure.
   - **b.** Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
   - **c.** Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.
   - **d.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont orthogonaux.
   - **e.** En déduire que L appartient au cercle de diamètre [OA].
   - **f.** Placer alors L sur la figure.