DEVOIR MAISON
UNE CROISSANCE EXPONENTIELLE DE VOS CONNAISSANCES

Vous traiterez des exercices au choix pour une valeur d'au moins cinq ♠.

Exercice 1 : Un peu d'algo ♠

Pouvez-vous expliquer les résultats donnés ci-contre par le logiciel de calcul formel Xcasfr ?

```
deriver(a*x^2+2a*x)
                                  a×2×x+ 2×a
deriver(a*x^2+2a*x,x)
                                  a×2×x+ 2×a
deriver(a*x^2+2a*x,a)
                                  x^2+ 2×x
deriver(ax^2+2ax,x)
                                  0
```

Exercice 2 : Un peu de trigo ♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que cette fonction est paire. Que peut-on en déduire sur sa $\mathscr{C}_f$?
2. Démontrer que cette fonction est périodique, de période 2π.
3. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. Déduire des trois questions précédentes le tableau de variations de f sur $[-2\pi;2\pi]$.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : Un peu de démo ♠♠

Préréquis sur la fonction exponentielle :

- ⇝ La fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée telle que l'image de 0 soit 1.
- ⇝ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la dérivée de la fonction e^u sur I est $u'e^u$

On se propose de démontrer la propriété suivante :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ on a : } \quad e^{x+y} = e^x \times e^y$$

ainsi que celles qui en découlent, à savoir :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y \text{ on a : } \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \text{et} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

Attention donc à ne pas utiliser ces propriétés dans la suite pour les démontrer !!

Soit y un réel quelconque, **fixé**. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x+y}}{e^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire que f est une fonction constante et que pour tout réel x, $f(x) = e^y$.
3. Conclure.
4. En remarquant que $-x + x = 0$ et $x - y = x + (-y)$, démontrer que, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \text{et} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

.

Exercice 4 : **Un peu de suite géo** ♠♠

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = e^{1-n}$.

1. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.
3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Montrer que $S_n = \dfrac{e^2}{e-1}\left(1 - e^{-n-1}\right)$.
4. Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 5 : **Encore un peu de suite et d'expo** ♠♠♠

On se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$, un réel a et la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1. Etudier la fonction f (tableau de variations complet).
2. On se place dans le cas $a = 1.5$.
   a. Représenter sur un même graphique (unité 10 cm) la fonction f sur $[0; 1.6]$ et la droite d'équation $y = x$, puis les trois premiers termes de la suite (v_n) pour $a = 1.5$.
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n) et sa limite éventuelle.
   c. Montrer par récurrence que la suite (v_n) est strictement positive.
   d. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   e. La suite (v_n) est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.
3. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (v_n) suivant les valeurs du réel a ?