Devoir Maison 4
Correction

Exercice 1 :

1. Déterminons la valeur du paramètre t de d_1 qui donne une abscisse égale à 17 : $17=-1+3t \iff 3t=18 \iff t=6$
   Pour $t=6$, on obtient : $y=1-3\times 6=-17$ et $z=-12$ L'ordonnée de A n'est pas égale à -17 donc $\boxed{A\notin d_1}$

   Déterminons la valeur du paramètre t de d_2 qui donne une abscisse égale à 17 : $17=-4-3t \iff 21=-3t \iff t=-7$
   Pour $t=-7$ on obtient : $y=9+2\times 7=9+14=23$ et $z=-5-7=-12$
   Les coordonnées du point A sont obtenues en choisissant $t=-7$. Par conséquent $\boxed{A\in d_2}$
2. Puisque $d_3//d_1$, tout vecteur directeur de d_1 est aussi un vecteur directeur de d_3.

   Par conséquent d_3 est dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;-3;2)$. Donc $\mathrm{M}(x;y;z)\in d_3 \iff \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{BM}}=t\vec{u} \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x-1=3t \\ y+2=-3t \\ z-3=2t \end{cases}$

   Une représentation paramétrique de d_3 est alors $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-3t-2 \\ z=2t+3 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$

3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-16;-25;15)$ dirige (AB). Par conséquent : $\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{AB}) \iff \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \exists t\in\mathbb{R} \begin{cases} x-17=-16t \\ y-23=-25t \\ z+12=15t \end{cases}$

   Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=-16t+17 \\ y=-25t+23 \\ z=15t-12 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$
   Pour le segment [AB], reprenons l'idée précédente : $\mathrm{M}(x;y;z)\in[\mathrm{AB}] \iff \exists t\in[0;1], \overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
   Les points du segment [AB] sont donc obtenus pour une valeur de t comprise entre 0 et 1 inclus.
4. d_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1(3;-3;2)$ et d_2 est dirigée par le vecteur $\vec{u}_2(-3;-2;1)$.
   Pour « passer » de $x_{\vec{u}_1}$ à $x_{\vec{u}_2}$ on multiplie par -1 et pour « passer » de $z_{\vec{u}_1}$ à $z_{\vec{u}_2}$ on multiplie par 0.5.
   Autrement dit il n'existe pas de réel t tel que $\overrightarrow{u_2}=t\overrightarrow{u_1}$: les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
   Donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles : elles sont soit sécantes, soit non coplanaires.

   $$\text{Or } \mathrm{M}(x;y;z)\in d_1\cap d_2 \iff \exists t\in\mathbb{R} \text{ et } t'\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=-1+3t=-4-3t' \\ y=1-3t=9-2t' \\ z=2t=-5+t' \end{cases}$$

   Nous sommes conduits à résoudre un système linéaire à trois équation et deux inconnues.
   Résolvons les deux premières équations :

   $$\begin{cases} -1+3t=-4-3t' \\ 1-3t=9-2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 3t+3t'=-3 \\ -3t+2t'=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t+3t'=-3 \\ 5t'=5 \end{cases} \iff \begin{cases} t+t'=-1 \Rightarrow t=-2 \\ t'=1 \end{cases}$$

   Enfin testons la troisième égalité avec $t=-2$ et $t'=1$: $2\times(-2)=-4$ et $-5+1=-4$.
   La troisième égalité est satisfaite. Par conséquent, d_1 et d_2 sont sécantes en un point S qui a pour coordonnées :

   $$\mathrm{S}(-1-6;1+6;-4) \iff \mathrm{S}(-7;7;-4)$$

Exercice 2 : ♠♠

1.

$$M(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow AM = r \Longleftrightarrow AM^2 = 9 \Longleftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$$

2. $\overrightarrow{AB}(2;-2;-1)$ dirige le segment [AB], par conséquent :

$$M(x;y;z) \in [AB] \Longleftrightarrow \exists t \in [0;1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t \in [0;1], \begin{cases} x-2 = 2t \\ y-3 = -2t \\ z-1 = -t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t \in [0;1], \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -2t+3 \\ z = -t+1 \end{cases}$$

3. **a.** Puisque $d//(AB)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige d.

$$M(x;y;z) \in d \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x+1 = 2t \\ y-1 = -2t \\ z-3 = -t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -2t+1 \\ z = -t+3 \end{cases}$$

b. On utilise la représentation paramétrique précédente. Puisque $x_E = 2$ on a $2 = 2t-1 \Longleftrightarrow 2t = 3 \Longleftrightarrow t = \dfrac{3}{2}$

E est obtenu pour $t = \dfrac{3}{2}$. On trouve alors son ordonnée et sa côte : $y_E = -2 \times \dfrac{3}{2} + 1 = -3+1 = -2$ et $z_E = -\dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{3}{2}$

Donc $E\left(2;-2;\dfrac{3}{2}\right)$

c.

$$M(x;y;z) \in d \cap \mathscr{S} \Longleftrightarrow (2t-1-2)^2 + (-2t+1-3)^2 + (-t+3-1)^2 = 9 \Longleftrightarrow (2t-3)^3 + (-2t-2)^2 + (-t+2)^2 = 9$$

Au final :

$$4t^2 - 12t + 9 + 4t^2 + 8t + 4 + t^2 - 4t + 4 = 9 \Longleftrightarrow 9t^2 - 8t + 8 = 0$$

$\Delta = 64 - 4 \times 9 \times 8 < 0$ cette équation n'admet pas de solution. On peut conclure que : $d \cap \mathscr{S} = \emptyset$

4. **a.** La droite (AC) admet $\overrightarrow{AC}(-3;-2;2)$ comme vecteur directeur.

$$M(x;y;z) \in (AC) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-2 = -3t \\ y-3 = -2t \\ z-1 = 2t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -3t+2 \\ y = -2t+3 \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

b.

$$M(x;y;z) \in (AC) \cap \mathscr{S} \Longleftrightarrow (-3t+2-2)^2 + (-2t+3-3)^2 + (2t+1-1)^2 = 9 \Longleftrightarrow 9t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 9 \Longleftrightarrow 17t^2 = 9 \Longleftrightarrow t = \pm\frac{3}{\sqrt{17}} = \pm\frac{3\sqrt{17}}{17}$$

Puisque cette équation admet deux solutions il existe deux points d'intersection entre (AC) et $\mathscr{S}$, on obtient leurs coordonnées en remplaçant t par les valeurs trouvées dans la représentation paramétrique de (AC). Notons G et H ces deux points :

$$G\left(-3 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 2; -2 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 3; 2 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 1\right) \quad \text{et} \quad H\left(3 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 2; 2 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 3; -2 \times \frac{3\sqrt{17}}{17} + 1\right)$$

5. **a.**

$$I\left(\frac{2+4}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{1+0}{2}\right) \Longleftrightarrow I\left(3;2;\frac{1}{2}\right)$$

Déterminons la valeur de t dans l'équation paramétrique de Δ qui donne 3 pour abscisse $3 + 2t = 3 \Longleftrightarrow t = 0$

En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de Δ on trouve $x = 3$ $y = 2$ et $z = \dfrac{1}{2}$

Ce sont les coordonnées du point I donc $I \in \Delta$.

b. Le vecteur $\vec{u}\left(2;3;-\dfrac{3}{2}\right)$ dirige Δ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-2;-1)$ dirige d. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires par conséquent les droites Δ et d sont non coplanaires ou sécantes. Pour le savoir on cherche les solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 2t-1=3+2t' \\ -2t+1=2+3t' \\ -t+3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t-2t'=4 \\ -2t-3t'=1 \\ -t+\dfrac{3}{2}t'=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t-t'=2 \\ -2t-3t'=1 \\ -t+\dfrac{3}{2}t'=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

On détermine la solution des deux premières équations :

$$\left\{\begin{array}{l} t-t'=2 \\ -2t-3t'=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=2+t' \\ -2(2+t')-3t'=1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=2+t' \\ -4-5t'=1 \Longrightarrow -5t'=5 \Longrightarrow t'=-1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=2-1=1 \\ t'=-1 \end{array}\right.$$

Vérifions que $t=1$ et $t'=-1$ satisfont la troisième égalité.

$$-t+\frac{3}{2}t'=-1-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$$

La troisième égalité est satisfaite. Ainsi d et Δ sont sécantes en un point S dont les coordonnées sont :

$$\mathrm{S}\,(2-1;-2+1;-1+3) \Longleftrightarrow \mathrm{S}(1;-1;2)$$

Exercice 3 : ♠♠

1. A, B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont non colinéaires.
   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(4;-2;4)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(0;-2;1)$.
   Pour « passer » de $x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$ à $x_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ on multiple par 0. En revanche on a $y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=y_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$.
   Par conséquent il n'existe aucun réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires : (ABC) est un plan.
2. **a.** $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(-2;3;-3)$ et $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-4+2\times 0;2+2\times 2;-4-2\times 1)$ i.e $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-4;6;-6)$.
   Au final on a $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$
   On vient de démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.

   b. D'après la question précédente $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
   On vient de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.

   c. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC) et $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ est un vecteur coplanaire à ce couple de vecteurs, on en déduit donc que (DE)//(ABC)
3. **a.** Les points A, B, C et E sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ On doit donc résoudre le système suivant (on rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(4;-2;4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(0;-2;1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}(0;-3;-1)$) :

$$\left\{\begin{array}{l} 0=4t+0t' \\ -3=-2t-2t' \\ -1=4t+t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0=4t \\ -3=-2t-2t' \\ -1=4t+t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ -3=-2t' \\ -1=t' \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ t'=1,5 \\ t'=-1 \end{array}\right.$$

   Le système n'admet aucun couple solution puisqu'il est impossible d'avoir en même temps $t'=-1$ et $t'=1,5$.
   Par conséquent il n'existe aucun couple de réels t et t' tels que $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   Ainsi les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires. Par conséquent E n'est pas un point du plan (ABC).

   b. (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) puisque $\mathrm{E}\notin(\mathrm{ABC})$.

Exercice 4 : ♠♠♠

Question 1 : *Le point* A$(3;1;1.5)$ *appartient-il à* d_1 *?*

Réponse 1 : En choisissant $t=\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de d_1 on obtient $x=1+2=3$, $y=2-1=1$ et $z=1+0,5=1,5$. Effectivement on en déduit que A $\in d_1$.

Question 2 : *Le point* B$(0;5;3)$ *appartient-il à* d_1 *?*

Réponse 2 : Si tel était le cas on aurait $0=1+4t \iff t=-\frac{1}{4}$.

En remplaçant t par $-\frac{1}{4}$ dans l'équation paramétrique de d_1 concernant les ordonnées, on trouve $y=2+2\times\frac{1}{4}=2,5$

Or, B n'a pas pour ordonnées 2,5, on en déduit que B $\notin d_1$.

Question 3 : *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles sécantes ?*

Réponse 3 : Si un point M$(x;y;z)\in d_1\cap d_2$ alors ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x=1+4t=3-6u \\ y=2-2t=2u \\ z=1+t=2-u \end{cases}$ Résolvons les deux premières équations de ce système :

$$\begin{cases} x=1+4t=3-6u \\ y=2-2t=2u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4t+6u=2 \\ -2t-2u=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+3u=1 \\ -2t-2u=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+3u=1 \\ u=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-3=1\Rightarrow 2t=4\Rightarrow t=2 \\ u=-1 \end{cases}$$

Vérifions si $t=2$ et $u=-1$ satisfont la troisième équation du système initial :

D'une part, $1+2=3$ et d'autre part $2-(-1)=3$, ainsi $t=2$ et $u=-1$ est l'unique couple solution du système.

On en déduit que les droites d_1 et d_2 sont sécantes en un point C qui a pour coordonnées : C$(1+8=9;2-4=-2;1+2=3)\iff$ C$(9;-2;3)$ **Question 4** : *Démontrer que* d_1 *et* d_3 *ne sont pas sécantes.*

Réponse : Si un point M$(x;y;z)\in d_1\cap d_2$ alors ses coordonnées vérifient $\begin{cases} x=1+4t=2-u \\ y=2-2t=-3-5u \\ z=1+t=10 \end{cases}$

Résolvons la première et la troisième équation de ce système :

$$\begin{cases} 4t+u=1 \\ 1+t=10\Rightarrow t=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 36+u=1\Longrightarrow u=1-36=-35 \\ t=9 \end{cases}$$

Vérifions si $u=-35$ et $t=9$ satisfont la deuxième équation du système initial :

D'une part $2-2\times 9=2-18=-16$,

D'autre part $-3-5\times(-35)=-3+150+25=172$

On trouve ici des résultats différents ce qui prouve que le système n'admet aucune solution, par conséquent $d_1\cap d_3=\emptyset$.

Question 5 : *Montrer que* $d_1=d_4$

Réponse : Le vecteur $\overrightarrow{u_1}(4;-2;1)$ dirige d_1 et le vecteur $\overrightarrow{u_4}(-2;1;-0,5)$ dirige d_4 ; de plus on a :

$$\overrightarrow{u_1}=-2\overrightarrow{u_4}$$

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ sont colinéaires, on en déduit que $d_1//d_4$.

On sait d'après la question 1 que A$(3;1;1.5)\in d_1$. Vérifions que A $\in d_4$:

$3=-3-2t\iff -2t=6\iff t=-3$.

Remplaçons t par -3 dans les deux dernières équations de d_4 en espérant retrouver les coordonnées de A :

$$y=4-3=1 \qquad \text{et} \qquad z=-\frac{1}{2}\times(-3)=\frac{3}{2}$$

On a vérifié que A $\in d_4$.

Au final $d_1//d_4$ et A est commun au deux droites, on en déduit que :

$$d_1=d_4$$