☙ DEVOIR MAISON 3 ☙
CORRECTION

Exercice 1 : ♠

1. $v_1 = v_0 + 2 \times 0 + 1 = 1 \qquad v_2 = \ldots = 4 \qquad v_3 = \ldots = 9 \qquad v_4 = \ldots 16 \qquad v_5 = 25$
   Il semble que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = n^2$.

2. L'initialisation a déjà été vérifiée.
   Supposons désormais qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = n^2$.
   On veut montrer que ceci implique que $v_{n+1} = (n+1)^2$.
   Or

$$\begin{aligned} v_n = n^2 \quad &\Longrightarrow \quad v_{n+1} = n^2 + 2n + 1 \qquad \text{d'après l'énoncé} \\ &\Longleftrightarrow \quad v_{n+1} = (n+1)^2 \qquad \text{Youpi!!} \end{aligned}$$

   Notre proposition est héréditaire, et initialisée donc elle est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$!

Exercice 2 : ♠♠

1. ⇝ **Initialisation** : pour $n = 0$. $u_0 = 2 > 0$ donc la proposition est vraie au rang 0.
   ⇝ **Hérédité** : On suppose qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Montrons que ceci implique que $u_{n+1} > 0$.
   Il est clair que $u_n > 0 \Longrightarrow 1 + 3u_n > 0$. De même $u_n > 0 \Longrightarrow 3 + u_n > 0$.
   D'après l'énoncé $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} > 0$ Youpi!
   ⇝ La proposition est héréditaire, et initialisée donc elle est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$!

2. ⇝ **Initialisation** : pour $n = 0$.
   $u_0 = 2 > 1$ donc la proposition est vraie au rang 0.
   ⇝ **Hérédité** : On suppose qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 1$. Montrons que ceci implique que $u_{n+1} > 1$.
   On tente la méthode précédente : il est clair que $u_n > 1 \Longrightarrow 1 + 3u_n > 1$.
   De même $u_n > 1 \Longrightarrow 3 + u_n > 1$.
   D'après l'énoncé $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$ cependant, un quotient de deux nombres plus grands que 1 n'est pas forcément lui-même plus grand que 1. Il faut donc changer de stratégie ...
   Réfléchissons au brouillon : $\dfrac{a}{b} > 1 \iff a > b$.
   Montrons donc plutôt que $1 + 3u_n > 3 + u_n \iff 3u_n - u_n > 3 - 1 \iff 2u_n > 2 \iff u_n > 1$
   Maintenant, il faut rédiger cela dans le sens logique d'implication. En gros, cela consiste à remonter notre raisonnement au brouillon, ce qui est possible puisque toutes nos « flèches » se remontent.
   On reprend donc au propre : $u_n > 1 \iff \ldots \iff 1 + 3u_n > 3 + u_n \iff \dfrac{1+3un}{3+u_n} > 1$ Youpi!
   ⇝ La proposition est héréditaire, et initialisée donc elle est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$!

Exercice 3 : ♠♠♠

1. **a.** $u_2 = \dfrac{1 \times u_1 + 1}{2(1+1)} = \dfrac{\frac{3}{2}+1}{4} = \dfrac{5}{2} \times 14 = \dfrac{5}{8}$ $\qquad u_3 = \dfrac{2 \times u_2 + 1}{2(2+1)} = \dfrac{\frac{5}{4}+1}{6} = \dfrac{9}{4} \times 16 = \dfrac{3}{8}$
   b. $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc la suite ne peut pas être arithmétique.
   De même, $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$, donc la suite ne peut pas être géométrique.

2. **a.** On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_{n+1} = q \times v_n$ où $q \in \mathbb{R}$.
   Regardons déjà à quoi ressemble v_{n+1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$ on a :
   $v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = \ldots = \dfrac{nu_n + 1}{2} - 1 = \ldots = \dfrac{nu_n - 1}{2} = \dfrac{1}{2} v_n$.
   Donc (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. De plus, on a $v_1 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.

b. Comme (v_n) est géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (0.5)^n$

De plus, d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_n = nu_n - 1 \iff v_n + 1 = n_u n \iff \frac{v_n + 1}{n} = u_n$

Finalement, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = \frac{1+(0,5)^n}{n}$

c. On sait que $\lim_{n\to+\infty} 0.5^n = 0$ car $-1 < 0.5 < 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + 0.5^n = 1$ et par quotient $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+0.5^n}{n} = 0.$
La suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 : ♠♠♠♠

1. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $v_{n+1} = q \times v_n$ où $q \in \mathbb{R}$.
Regardons déjà à quoi ressemble v_{n+1}. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$ on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} && \text{au lieu de remplacer directement et bêtement } u_{n+1} \text{ par sa valeur}\\
&= (u_{n+1}-1) \times \frac{1}{u_{n+1}+1} && \text{on change l'écriture du quotient ce qui évite la fraction à quatre étages...}\\
&= \left(\frac{1+0.5u_n}{0.5+u_n} - 1\right) \times \frac{1}{\frac{1+0.5u_n}{0.5+u_n}+1}\\
&= \ldots && \text{Pensez à écrire l'inverse de la fraction en échangeant ses étages !}\\
&= \left(\frac{0.5-0.5u_n}{0.5+u_n}\right) \times \left(\frac{0.5+u_n}{1.5+1.5u_n}\right)\\
&= \ldots\\
&= \frac{0.5(1-u_n)}{1.5(1+u_n)} = \ldots = -\frac{1}{3}v_n
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

2. $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{3}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

3.

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\iff (u_n+1)v_n = u_n - 1\\
&\iff u_n v_n + v_n = u_n - 1\\
&\iff u_n v_n - u_n = -1 - v_n\\
&\iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n\\
&\iff \ldots \iff u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}
\end{aligned}$$

4. On sait que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{3} < 1$

Par règles d'opération sur les limites, on trouve donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+0}{1-0} = 1$