∽ DEVOIR MAISON 3 ∾
RÉCURRENCE ET LIMITES

Vous traiterez au choix au moins deux exercices parmi les quatre suivants.

Exercice 1 : ♠

On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 2n + 1$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite v, puis conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
2. Démontrer par récurrence votre conjecture émise à la question 1.

Exercice 2 : ♠♠

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $\quad u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$ [(a)].

Exercice 3 : ♠♠♠

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

1. **a.** Calculer u_2 et u_3.
   b. En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1+(0,5)^n}{n}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : ♠♠♠♠

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $\quad u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
2. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

(a). Attention, $x > 4$ et $y > 4$ n'implique pas du tout que $\dfrac{x}{y} > 1$! Il faut réfléchir à ce que signifie pour une fraction d'être plus grande que 1 ...