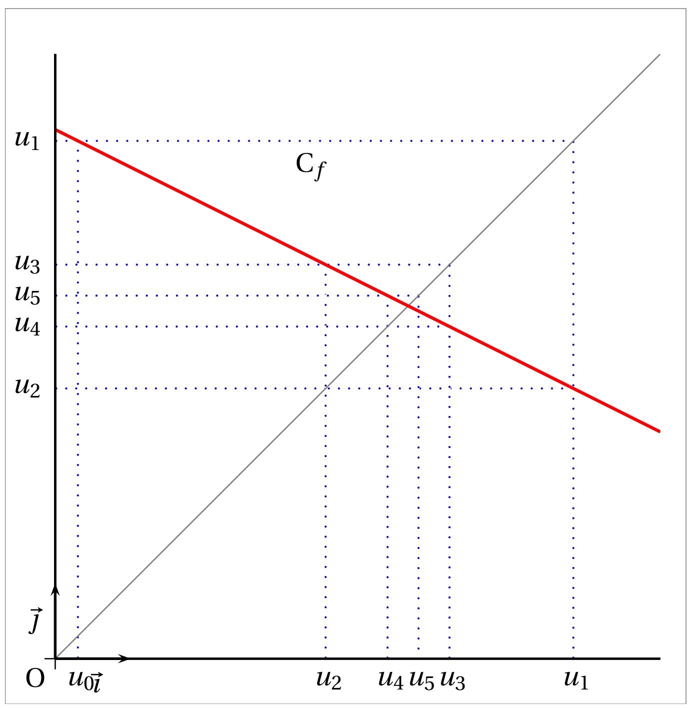
∽ Correction du Devoir Maison 2 ∽
Suite arithmético-géométrique

PARTIE A : **Premier constat**

1. $u_1 = -0,5 \times 0,3 + 7 = 6,85$ Remarquons l'extraordinaire expanson du Schblurb qui en l'espace d'un an a vu sa population passée de 300000 individus à plus de 6 millions.
   $u_2 = -0,5 \times 6,85 + 7 = 3,575$ Cette deuxième année a vu la population de Schblurb chutée de manière inquiétante, il faudra attendre la troisième année pour être rassuré : $u_3 = -0,5 \times 3,575 + 7 = 5,2125$
2. $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc la suite ne peut pas être arithmétique.
   De même, $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$, donc la suite ne peut pas être géométrique.
3. (u_n) semble converger vers un nombre proche de 4.67, peut-être $4 + \dfrac{2}{3}$?

PARTIE B : **Première méthode : avec une fonction**

1. Considérons la fonction f qui a un réel x associe $f(x) = -0,5x + 7$.
   On a alors, pour $x = u_n$:
   $$f(u_n) = -0,5u_n + 7 = u_{n+1}$$
2. 

3. Graphiquement, il semble que la suite (u_n) converge vers l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = -0,5x + 7$ et $y = x$. Justifions cela par le calcul.
   On sait que si (u_n) converge vers un réel ℓ (« détail » que nous n'avons pas démontré, pourtant nécessaire pour conclure, mais c'est ma faute ...), alors :
   - ⇝ (u_{n+1}) converge vers le même réel ℓ.
   - ⇝ (u_{n+1}) converge aussi vers $-0.5\ell + 7$ d'après les règles d'opérations sur les limites.
   - ⇝ Par unicité de la limite, nécessairement on a $\ell = -0.5\ell + 7 \iff \ldots \iff \ell = \dfrac{14}{3}$.
     Ce qui revient bien à trouver l'abscisse du point d'intersection des deux droites représentées.
4. La population de Schlurbs communs à aillettes mouchetées se stabilisera autour de $\dfrac{14}{3}$.

PARTIE C : **Deuxième méthode : avec une suite auxiliaire**

1. D'après l'énoncé on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a} = u_n - \dfrac{7}{1+0,5} = u_n - \dfrac{14}{3}$

2. Montrer que v est géométrique revient à montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n \times q$ où $q \in \mathbb{R}$
Attention, cette fois, on ne peut pas se contenter de regarder les premiers termes. En effet, le fait que les premiers termes soient en progression géométrique nous permet uniquement de conclure que la suite ***peut*** *être géométrique de raison* $\frac{v_2}{v_1}$ *...*
Regardons alors ce qui se passe pour $n \in \mathbb{N}$: on a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{14}{3} = -0,5u_n + 7 - \frac{14}{3} = -0,5u_n + \frac{21-14}{3} = -0,5u_n + \frac{7}{3} = -0,5\left(u_n + \frac{7/3}{-0,5}\right) = -0,5\left(u_n - \frac{7/3}{1/2}\right)$$

D'où $\quad v_{n+1} = -0,5\left(u_n - \frac{14}{3}\right) = -0,5v_n$ $\qquad v$ est bien une suite géométrique de raison $q = -0,5$.

3. D'après le cours, puisque v est une suite géométrique $\quad v_n = v_0 \times q^n = v_0 \times (-0,5)^n$
De plus $\quad v_0 = u_0 - \frac{14}{3} = 0,3 - \frac{14}{3} = \frac{9}{30} - \frac{140}{30} = -\frac{131}{30}$, $\quad$ ce qui donne au final :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n$$

4. D'après l'énoncé, on a $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{14}{3}$
Puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n$ on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n = u_n - \frac{14}{3} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

5. On va utiliser le résultat de la question précédente. On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car : } -1 < -\frac{1}{2} < 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Au final :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3} = \frac{14}{3}$$

Ainsi $\ell = \frac{14}{3} \simeq 4,67$.

6. La population de Schblurb, le temps passant, se stabilisera autour de $4,67$ millions d'individus.

PARTIE D : **Pour aller plus loin**

Notons dans un premier temps que $u_0 < 0$ est impossible, par soucis de cohérence avec l'énoncé.
Ensuite, la partie B aide grandement à trouver de telles valeurs.
En effet, les valeurs de a et b changent la fonction f, donc le point d'intersection des deux droites représentées. On peut donc faire en sorte que ce point d'intersection ait pour abscisse 0. Donc choisir $b = 0$ dans un premier temps.
Enseuite, par soucis de cohérence toujours, il ne faudrait pas que la population devienne négative à un moment, ce qui est le cas si l'on ne change pas le a. En fait, c'est le cas dès que l'on a un escargot, et l'on peut constater que cela arrive dès que la fonction f est décroissante. Choisisons alors un $a > 0$.
Par exemple, $a = 2$. On constate facilement grâce à un graphique, que l'on a un escalier qui monte, donc que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, ce qui est le contraire de ce que l'on veut.
En fait, c'est le cas dès que la droite représentant f (croissante) est au-dessus de la diagonale.
Choissons alors un $a < 1$ pour avoir un escalier qui descend, donc dans la direction du point $(0;0)$.
Par exemple, on peut choisir $a = 0.5$. Puis il suffit de choisir n'importe quel u_0 positif.
Essayez, vous verrez !