∽ DEVOIR MAISON 2 ∽
SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à aillette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.

On modélise la population de Schblrurbs par une suite (u_n), où un terme u_n désigne l'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, pour l'année n.
Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
On sait que la population de Schblrurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite u pour certaines valeurs de la population initiale u_0 et des paramètres a et b.
Dans les parties A, B et C, on se place dans le cas où : $u_0 = 0,3$, $a = -0,5$ et $b = 7$

PARTIE A : **Premier constat**

1. Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
2. En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de (u_n) à l'infini.

On cherche à estimer la population de Schblurbs communs à aillette mouchetée dans l'avenir lointain, donc à démontrer notre conjecture.
Pour cela on propose deux techniques différentes (parties B et C), qui tombent souvent au baccalauréat Syldave.
Vous traiterez au choix au moins l'une des deux.

PARTIE B : **Première méthode : avec une fonction**

1. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé.
3. En vous inspirant du graphique, déterminer **par le calcul** la limite de la suite (u_n).
4. Interpréter en termes de population de Schblurbs communs à aillette mouchetée.

PARTIE C : **Deuxième méthode : avec une suite auxiliaire**

On donne la suite (v_n) est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

1. Vérifier que, pour tout entier n, on a :
$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$
5. En déduire la limite ℓ de la suite (u_n).
6. Interpréter en termes de population de Schblurbs communs à aillette mouchetée.

PARTIE D : **Pour aller plus loin**

Proposer si possible des valeurs pour u_0, a et b pour lesquelles la population de Schblurbs communs à aillette mouchetée tend à s'éteindre. **Justifier**.