Solution : Exercice 9

1. $P(i) = i^3 - (6+i)\times i^2 + \alpha \times i - 13i = -i + (6+i) + \alpha i - 13i$

Donc $P(i) = 0 \iff 6 + \alpha i - 13i = 0 \iff \ldots \iff \alpha = 13 + 6i$. D'où $\boxed{P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i}$

2.

$$\begin{aligned}(z-i)(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib \\ &= P(z) \iff \begin{cases} a - i = -(6+i) \\ b - ia = 13 + 6i \\ -ib = -13i \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b + 6i = 13 + 6i \\ b = 13 \end{cases}\end{aligned}$$

On vérifie dans la deuxième équation, on retrouve bien $b = 13$. Donc $\boxed{P(z) = (z-i)(z^2 - 6z + 13)}$

3.

$$\begin{aligned} P(z) = 0 \quad &\iff \quad z - i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \\ &\iff \quad \boxed{z_1 = i} \quad \text{ou} \quad \Delta = -16 \\ & \qquad\qquad z_2 = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = \cdots = \boxed{z_2 = 3 - 2i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_3 = 3 + 2i} \end{aligned}$$

On peut donc dire que $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ ie $\boxed{P(z) = (z-i)(z-3+2i)(z-3-2i).}$

Solution : Exercice 10

1. $\begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = 2 - z \\ z(2-z) = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = 2 - z \\ 2z - z^2 - 17 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-17) = -64$

Donc $\quad z_1 = \dfrac{-2+8i}{-2} = 1 - 4i \quad$ et $\quad z_2 = 1 + 4i$

D'où $\quad z_1' = 2 - z_1 = 2 - (1-4i) = 1 + 4i \quad$ et $\quad z_2' = 2 - z_2 = \cdots = 1 - 4i$ $\quad \boxed{\mathscr{S} = \{(1-4i;1+4i);(1+4i;1-4i)\}}$

Les rôles de z et z' étant symétriques, il est logique d'avoir deux couples de solutions symétriques.

2. $\begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = 5 - z \\ z(5-z) = 6.5 \end{cases} \iff \begin{cases} z' = 5 - z \\ 5z - z^2 - 6.5 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = 25 - 4 \times (-1) \times (-6.5) = -1$

Donc $\quad z_1 = \dfrac{-5+i}{-2} = \dfrac{5-i}{2} \quad$ et $\quad z_2 = \dfrac{5+i}{2}$

D'où $z_1' = 5 - z_1 = 5 - \dfrac{5-i}{2} = \dfrac{10-5+i}{2} = \dfrac{5+i}{2} \quad$ et $\quad z_2' = 5 - z_2 = \cdots = \dfrac{5-i}{2}$ $\quad \boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5-i}{2};\frac{5+i}{2}\right);\left(\frac{5+i}{2};\frac{5-i}{2}\right)\right\}}$

Les rôles de z et z' étant symétriques, il est logique d'avoir deux couples de solutions symétriques.

Solution : Exercice 11

1. *Sans indication supplémentaire, on teste des solutions évidentes.*

Commençons par $z = i$: $i^3 + (-8+i)i^2 + (17-8i)i + 17i = -i - (-8+i) + 17i + 8 + 17i \neq 0$

Essayons $z = -i$: $(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i) \times (-i) + 17i = i - (-8+i) - 17i - 8 + 17i = 0$

Donc $z = -i$ est une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

La lecture de la question 2. aurait pu nous aiguiller *... Une autre méthode est présentée dans l'exercice 12.*
Attention, $z = i$ n'est pas solution car l'équation n'est pas à coefficients réels !

2.

$$\begin{aligned}(z+i)(z^2+az+b) &= z^3 + az^2 + bz + iz^2 + iaz + ib \\ &= z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i \iff \begin{cases} a + i = -8 + i \\ b + ia = 17 - 8i \\ ib = 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a = -8 \\ b - 8i = 17 - 8i \\ b = 17 \end{cases}\end{aligned}$$

On vérifie dans la deuxième équation, on retrouve bien $b = 17$.

Donc $\boxed{z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)}$

3.

$$\begin{aligned}(E) &\iff z + i = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 8z + 17 = 0 \\ &\iff \boxed{z_1 = -i} \quad \text{ou} \quad \Delta = -4 \quad z_2 = \frac{8 - i\sqrt{4}}{2} = \cdots = \boxed{z_2 = 4 - i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_3 = 4 + i}\end{aligned}$$

Solution : Exercice 12

1. On pose $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Alors $z \in i\mathbb{R}$ et z est solution de $f(z) = 0$ si et seulement si

$$(iy)^4 - 6(iy)^3 + 14(iy)^2 - 24(iy) + 40 = 0 \iff y^4 + 6iy^3 - 14y^2 - 24iy + 40 = 0$$

Or un nombre complexe vaut 0 si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle valent 0.

On a donc $f(z) = 0 \iff \begin{cases} Re\left(y^4 + 6y^3 i - 14y^2 - 24yi + 40\right) = 0 \\ Im\left(y^4 + 6iy^3 - 14y^2 - 24iy + 40\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^4 - 14y^2 + 40 = 0 \\ 6y^3 - 24y = 0 \end{cases}$

Résolvons déjà la deuxième équation qui est très simple :
$6y^3 - 24y = 0 \iff 6y(y^2 - 4) = 0 \iff y = 0$ ou $y = 2$ ou $y = -2$.
Regardons alors si la première équation est vérifiée dans chacun des trois cas précédents.

- $\rightsquigarrow$ Si $y = 0$ alors $y^4 - 14y^2 + 40 \neq 0$ Donc $y = 0$ n'est pas solution du système, ni de $f(z) = 0$ donc.
- $\rightsquigarrow$ Si $y = 2$ alors $y^4 - 14y^2 + 40 = 16 - 46 + 40 = 0$. Donc $y = 2$ est solution du système et donc de $f(z) = 0$.
- $\rightsquigarrow$ Idem pour $y = -2$, puisque les exposants sont pairs.

Ainsi, $z = 2i$ et $z = -2i$ sont les deux solutions imaginaires pures de $f(z) = 0$.

On pouvait aussi résoudre la première équation avec le changement de variable $\mathrm{Y} = y^2$.
On trouve alors comme solutions $y = \pm\sqrt{10}$ et $y = \pm 2$.
Les solutions du système sont donc les solutions communes aux deux équations, à savoir $y = \pm 2$.

2. ***Grâce à cette question, on sait que l'on a la précédente juste !***

$$\begin{aligned}(z^2+az+b)(z^2+4) &= z^4 + 4z^2 + az^3 + 4az + bz^2 + 4b \\ &= f(z) \iff \begin{cases} a = -6 \\ 4 + b = 14 \\ 4a = -24 \\ 4b = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -6 \\ b = 10 \\ a = -6 \\ b = 10 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(z) = (z^2 - 6z + 10)(z^2 + 4)}$

3.

$$\begin{aligned}f(z) = 0 &\iff z^2 - 6z + 10 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + 4 = 0 \\ &\iff \Delta = -4 \quad \text{ou} \quad \boxed{z_3 = 2i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_4 = -2i} \\ & z_1 = \frac{6 - i\sqrt{4}}{2} = \cdots = \boxed{z_1 = 3 - i} \quad \text{ou} \quad \boxed{z_2 = 3 + i}\end{aligned}$$