Correction du contrôle commun de TS n°2

Exercice n°1 :

1. La droite d'équation $y=4$ est asymptote en $+\infty$ à $\mathscr{C}_f$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+b}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(a+\frac{b}{x})}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\frac{b}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\dfrac{a}{1}=a$

Donc $a=4$

$f(1)=3\Leftrightarrow\dfrac{4\times1+b}{1-3}=3$

$\Leftrightarrow\dfrac{4+b}{-2}=3$

$\Leftarrow 4+b=-6$

$\Leftarrow b=-10$

On retrouve donc la fonction f donnée dans la question suivante : $f(x)=\dfrac{4x-10}{x-3}$

2. a) On a vu à la question précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$

En - ∞ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-10}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(4-\frac{10}{x})}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-\frac{10}{x}}{1-\frac{3}{x}}=\dfrac{4}{1}=4$

Il y a donc une asymptote horizontale en -∞ et +∞ d'équation $y=4$.

En 3^+ : $\lim\limits_{x\to3^+} 4x-10=2$ et $\lim\limits_{x\to3^+} x-3=0^+$ (car si $x>3, x-3>0$) donc $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=+\infty$

Et en 3^- : $\lim\limits_{x\to3^-} 4x-10=2$ et $\lim\limits_{x\to3^-} x-3=0^-$ (car si $x<3, x-3<0$) donc $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$

Il y a donc une asymptote verticale en 3 d'équation $x=3$.

b) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec : $u(x)=4x-10, u'(x)=4, v(x)=x-3, v'(x)=1$

Donc $f'(x)=\dfrac{4(x-3)-(4x-10)\times1}{(x-3)^2}=\dfrac{4x-12-4x+10}{(x-3)^2}=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$

On a donc le tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-2		$-$	‖	$-$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

c) On lit dans le tableau de variation que sur]-∞;3[on a $f(x)<4$ et que sur]3;+∞[on a $f(x)>4$ donc $f(x)\neq4$ sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. La courbe de f ne passe donc pas par l'ordonnée 4, elle ne coupe pas son asymptote.

On peut s'en convaincre autrement en résolvant $f(x)=4$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$:

$\dfrac{4x-10}{x-3}=4\Leftrightarrow4x-10=4(x-3)\Leftarrow4x-10=4x-12\Leftrightarrow-10=-12$ Impossible donc il n'y a pas de solution.

Exercice n°2 :

1. Pour prouver que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires, nous allons montrer qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles (ou confondues) :

Pour le parallélisme (ou la confondunuité) :

$\vec{u}$ (1;3;0) et $\vec{v}$ (2;1;-1) sont les vecteurs directeurs respectifs de D_1 et D_2 et ne sont pas colinéaires (car ${}^x\vec{v}=2\,{}^x\vec{u}$ et ${}^y\vec{v}\neq 2\,{}^y\vec{u}$) donc D_1 et D_2 ne sont ni parallèles, ni confondues.

Pour la sécantation :

Cherchons un éventuel point d'intersection $M(x_M ; y_M ; z_M)$ pour D_1 et D_2 :

$M\in D_1 \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R}, \begin{cases} x_M=3+a \\ y_M=9+3a \\ z_M=2 \end{cases}$ et $M\in D_2 \Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}, \begin{cases} x_M=0{,}5+2b \\ y_M=4+b \\ z_M=4-b \end{cases}$

Cela revient donc à chercher s'il existe deux valeurs réelles pour *a* et *b* telles que :

$\begin{cases} 3+a=0{,}5+2b \\ 9+3a=4+b \\ 2=4-b \end{cases}$

La dernière ligne nous donne $b=2$ donc la première ligne donne $3+a=0{,}5+4 \Leftrightarrow a=1{,}5$

Vérifions ces résultats dans la deuxième ligne : $9+3a=13{,}5\neq 6=4+b$

Donc on ne peut pas trouver de telles valeurs de *a* et de *b*, ce point M n'existe donc pas : les deux droites ne sont pas sécantes, elles sont donc non coplanaires.

2. a) $S\notin D_1$ car $z_S\neq 2$

$S\notin D_2$ car $y_S=4 \Rightarrow b=0$ or $z_S=0{,}1 \Rightarrow b=3{,}9$

b) $\vec{SM}(3+a-3 ; 9+3a-4 ; 2-0{,}1)$ et $\vec{SM}'(0{,}5+2b-3 ; 4+b-4 ; 4-b-0{,}1)$

donc $\vec{SM}(a ; 5+3a ; 1{,}9)$ et $\vec{SM}'(-2{,}5+2b ; b ; 3{,}9-b)$

c) S, M et M' alignés $\Leftrightarrow \vec{SM}$ et $\vec{SM}'$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}, \vec{SM}=k\,\vec{SM}'$

Si on trouve une position pour M et M' telles qu'il existe un réel *k* pour que $\vec{SM}=k\,\vec{SM}'$ alors on pourra conclure que S, M et M' peuvent être alignés.

Autrement dit il faudra trouver une valeur de *a*, *b* et *k* pour que

$\begin{cases} a=k(-2{,}5+2b) \\ 5+3a=k\times b \\ 1{,}9=k(3{,}9-b) \end{cases}$

C'est le système qui a été résolu du Xcas, ce dernier donnant pour unique résultat $a=\frac{-29}{16}, b=\frac{-7}{6}\, et\, k=\frac{3}{8}$

Il existe donc une unique position qui aligne S, M et M'.

d) On a alors $M(3-\frac{29}{16} ; 9+3\times(\frac{-29}{16}), 2)$ $\quad M(\frac{19}{16} ; \frac{57}{16} ; 2)$

$M'(0{,}5+\frac{2\times -7}{6} ; 4-\frac{7}{6} ; 4+\frac{7}{6})$ $\quad M'(\frac{-11}{6} ; \frac{17}{6} ; \frac{31}{6})$

e) A ce moment là, (R) est la droite passant par S, dirigée par $\vec{MM}'$ qui a pour coordonnées :

$\vec{MM}'(\frac{-11}{6}-\frac{19}{16} ; \frac{17}{6}-\frac{57}{16} ; \frac{31}{6}-2)$ $\quad \vec{MM}'(\frac{-145}{48} ; -\frac{35}{48} ; \frac{19}{6})$

On a donc la représentation paramétrique de la droite (R) qui est : $\begin{cases} x=3-\frac{145}{48}t \\ y=4-\frac{35}{48}t \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=0{,}1+\frac{19}{6}t \end{cases}$

Exercice 3 :

1. $z_1 = \dfrac{4+i}{2-3i} = \dfrac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{8+2i+12i-3}{2^2+3^2} = \dfrac{5+14i}{13} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{14}{13}i$

$z_2 = (1-i)^3 = (1-i)^2 \times (1-i) = (1^2 - 2\times 1 \times i + i^2)(1-i) = (1-2i-1)(1-i) = -2i(1-i) = 2i^2 - 2i = -2-2i$

2. a. $2iz + 4 = -3z + i \Leftarrow 2iz + 3z = -4 + i \Leftrightarrow z(3+2i) = -4+i \Leftrightarrow z = \dfrac{-4+i}{3+2i} = \dfrac{(-4+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = -\dfrac{10}{13} + \dfrac{11}{13}i$

b. Soient a et b deux nombres réels tels que $z = a + ib$
$z + 2\bar{z} = 3 - 4i \Leftrightarrow a + ib + 2(a - ib) = 3 - 4i \Leftarrow 3a - ib = 3 - 4i$
Par identification des parties réelles et imaginaires, cela donne $3a = 3 \Leftrightarrow a = 1$ et $-ib = -4i \Leftrightarrow b = 4$
La solution est donc $z = 1 + 4i$

c. $2 - z = \dfrac{2}{z}$ pour $z \neq 0$:
$\Leftrightarrow z(2-z) = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0$ avec $z \neq 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ donc il y a deux solution complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-2 + i\sqrt{4}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-2+2i}{-2} = 1 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$

Exercice 4 :

Partie A :
Initialisation : $U = 0$
Passages dans la boucle : Si $N = 3, k$ doit varier de 0 à $N - 1 = 2$

k	U
0	$3\times 0 - 2\times 0 + 3 = 3$
1	$3\times 3 - 2\times 1 + 3 = 10$
2	$3\times 10 - 2\times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie est alors $U = 29$

Partie B :

1. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3\times 0 + 3 = 3$

$u_2 = 3u_1 - 2\times 1 + 3 = 3\times 3 - 2 + 3 = 10$

2. a. Initialisation : $u_0 = 0 \geq 0$
Donc la propriété que nous cherchons à démontrer est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang $n = k$. Est-elle vraie au rang $n = k+1$? (C'est à dire que $u_{k+1} \geq k+1$)

Hypothèse de récurrence : $u_k \geq k$
$\Leftrightarrow 3u_k - 2k + 3 \geq 3k - 2k + 3$
$\Leftrightarrow u_{k+1} \geq k + 3 \geq k + 1$

La propriété est vraie au rang k+1 : nous venons de démontrer par récurrence qu'elle est vraie pour tout les nombres entiers à partir du rang $n = 0$, donc sur $\mathbb{N}$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de minoration des limites.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$

Or on vient de voir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - n \geq 0$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, 2(u_n - n) + 3 \geq 0$
Nous venons de démontrer que pour tout entier *n*, $u_{n+1} \geq u_n$ donc que la suite (u_n) est croissante.

4. a. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - (n+1) + 1 = 3u_n - 3n + 3 = 3v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$

On peut donc écrire que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \times 3^n = 3^n$

b. Ainsi on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n = u_n - n + 1$
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + n - 1$

c. $\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$, $\lim_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5. a. $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$
En particulier pour $A = 10^p$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_{0,} u_n \geq 10^p$

b. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p + 1 = (3^3)^p + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geq 10^p$ car $27 > 10$ et $3p - 1 > 0$ car $p \in \mathbb{N}^*$ donc $p \geq 1$
$N = 3p$ convient. Donc comme n_0 est la plus petite valeur de N qui convient, on a $n_0 \leq 3p$

c. Cherchons le rang à partir duquel la suite est toujours plus grande que $10^3 = 1000$
Comme la suite est croissante, il s'agit du rang à partir duquel la suite va passer d'une valeur strictement inférieure à 1000 à une valeur supérieure ou égale à 1000.
La calculatrice indique que $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc $n_0 = 7$.

d.

Entrée
Saisir la valeur de *p*
Traitement
Affectuer à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
  Tant que $U < 10^p$
    Affectuer à U la valeur $3U - 2k + 3$
    Affecter à k la valeur $k + 1$
  Fin Tant que
Afficher k