CONTRÔLE COMMUN DE TS

<u>Exercice n° 1:</u> (5 points) Commun à tous les candidats.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-3}$ où a et b sont des réels.
   On sait que la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
   De plus $f(1)=3$.
   Déterminer les valeurs de a et de b.
2. Soit $f(x)=\dfrac{4x-10}{x-3}$.
   a) Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes de la courbe de f.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c) La courbe de f coupe-t-elle son asymptote horizontale ?

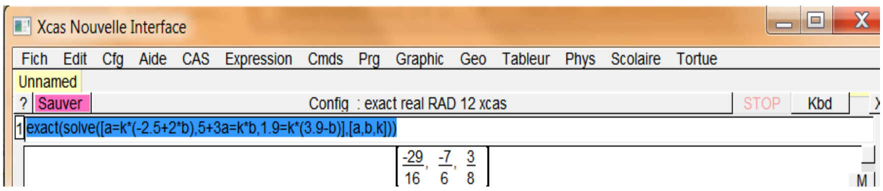
<u>Exercice n° 2:</u> (6 points) Commun à tous les candidats.

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. L'unité sur chaque axe est 1 km. Le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ représenté le sol.Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites D_1 et D_2, dont on connait des représentations paramétriques :

$$\mathrm{D}_1 : \begin{cases} x=3+a \\ y=9+3a \quad a\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases} \qquad \mathrm{D}_2 : \begin{cases} x=0{,}5+2b \\ y=4+b \quad b\in\mathbb{R} \\ z=4-b \end{cases}$$

1. Prouver que les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées $\mathrm{S}(3;4;0{,}1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R).
   Un technicien souhaite savoir s'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites D_1 et D_2.
   a) Montrer que S n'appartient ni à D_1 ni à D_2.
   b) Soit $\mathrm{M}(3+a;9+3a;2)$ un point mobile de D_1 et $\mathrm{M}'(0{,}5+2b;4+b;4-b)$ un point mobile de D_2.
   Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SM}'}$ en fonction de a et b.
   c) Pour répondre à son problème de droite (R) sécante avec D_1 et D_2, le technicien a fait appel au logiciel de calcul formel Xcas qui résout le système $\overrightarrow{\mathrm{SM}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{SM}'}$, dont la copie d'écran est :



   En utilisant les données de Xcas, expliquer pourquoi les points S , M et M' peuvent être alignés.
   d) Donner les coordonnées des points M et M' dans ce cas.
   e) Donner une représentation paramétrique de la droite (R).

<u>Exercice n° 3:</u> (4 points) Commun à tous les candidats.

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
   $z_1=\dfrac{4+\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$; $z_2=(1-\mathrm{i})^3$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
   a) $2iz+4=-3z+\mathrm{i}$;
   b) $z+2\bar{z}=3-4\mathrm{i}$;
   c) $2-z=\dfrac{2}{z}$.

<u>Exercice n° 4:</u> (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Soit n un entier naturel quelconque. Déterminer le ou les diviseurs communs de $2n+1$ et $3n+1$.
2. En déduire la fraction irréductible égale à $\dfrac{4\ 000\ 000\ 001}{6\ 000\ 000\ 001}$.

Partie B

Soit n un entier naturel quelconque.
On considère l'équation $(\mathrm{G}_n): 3x^2+7y^2=10^{2n}$ où (x et y sont des entiers relatifs).

1.
   a) Écrire la division euclidienne de 100 par 7 .
   b) En déduire que si $(x;y)$ est un couple solution de (G_n) , alors $3x^2 \equiv 2^n (mod\ \ 7)$
2. Compléter le tableau suivant avec les restes de la division euclidienne de $3x^2$ par 7 .

$x \equiv \ldots (mod\ \ 7)$	0	1	2	3	4	5	6
$3x^2 \equiv \ldots (mod\ \ 7)$							

3.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel q , $2^{3q} \equiv 1 (mod\ \ 7)$.
   b) En écrivant n sous ses différentes formes possibles par la division par 3 , déterminer tous les restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 7 .
   c) Déduire de ce qui précède l'ensemble des couples solutions de l'équation (G_n) .

<u>Exercice n° 4:</u> (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

On considère l'algorithme ci-contre.
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N .

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$?

Entrée
  Saisir le nombre entier naturel non nul N .

Traitement
  Affecter à U la valeur 0
  Pour k allant de 0 à N−1
    Affecter à U la valeur $3\mathrm{U}-2k+3$
  Fin pour

Sortie
  Afficher U

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=3\mathrm{u}_n-2\mathrm{n}+3$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2.
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geqslant n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n=u_n-n+1$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n=3^n+n-1$.
   c) Retrouver la limite le la suite (u_n) grâce au résultat de la question précédente.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .
   b) Justifier que $n_0 \leqslant 3\mathrm{p}$.
   c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.
   d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.