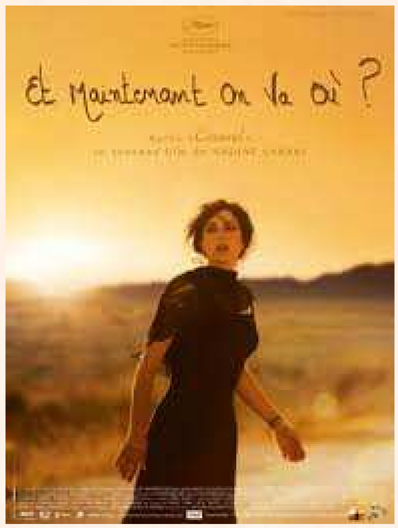
Chapitre 6

Quelle est la probabilité d'avoir son bac ??



Hors Sujet

Titre : « Et maintenant on va où ? »
Auteur : Nadine Labaki
Présentation succinte : Nominé pour plusieurs prix « *Et maintenant on va où ?* » , de **Nadine Labaki**, a remporté le prix du Jury Oecuménique – Mention Spéciale à Cannes. Après « *Caramel* » , film déjà primé, la réalisatrice revient sur un thème extrêmement contemporain : la cohabitation religieuse.
Le film s'ouvre sur une scène originale, où, des femmes, drapées de noir, endeuillées, entament une danse esthétiquement précise et émotionnellement forte. Les femmes nous regardent comme si elles assistaient à un spectacle et que donc nous étions le film ce qui renforce l'aspect contemporain du sujet. Il s'agit des femmes d'un village, divisé en deux confessions avec d'un côté les musulmans regroupés derrière leur Cheikh, et de l'autre, les catholiques et leur Prêtre. Lors d'une soirée où ils sont tous regroupés devant la télévision, les habitants regardent le journal télévisé qui leur apprend des affrontements entre catholiques et musulmans. Dès lors, les tensions du passé sont ravivées et les hommes ne jurent plus que par leurs religions laissant les femmes abattues par cette situation, mais cherchant des solutions plus originales les unes que les autres pour garder la paix...

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Revoir la loi binomiale
- ⇝ Utiliser la formules des probabilités conditionnelles et celle des probabilités totales
- ⇝ Montrer que deux événements sont indépendants

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

JOHN LOUIS VON NEUMANN (RÉALISTE...)

CHAPITRE 6:

QUELLE EST LA PROBABILITÉ D'AVOIR SON BAC ??

Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse, ie **axiomatique** en a été proposée trois siécles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^{eme} siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu ...
Ainsi, la théorie des probabilités est jeune par rapport aux autres grandes disciplines mathématiques : elle prend réellement forme au XVII^{e} siècle, dans la correspondance entre Blaise Pascal, philosophe, théologien et mathématicien, et Pierre de Fermat, avocat et mathématicien « amateur » comme il se qualifiait lui-même, alors qu'il est l'une des grandes figures mathmétiques modernes (deux théorèmes d'arithmétiques portent son nom, dont l'un ne fut démontré qu'en 1994).
Si les probabilités ont attendu si longtemps avant de voir le jour, c'est peut-être à cause de l'étrangeté philosophique qu'elles véhiculent, à savoir l'idée qu'un événement du monde physique soit pensé non pas dans les termes « il se produit ou il ne se produit pas », mais « il peut se produire avec x% de chances »...
Si on dit qu'il y a 35,4% de chances qu'il pleuve demain à Carcassonne à 11h, cela signifie-t-il qu'il pleuvra réellement à Carcassonne mais seulement à 35,4% et qu'il fera en même temps soleil à 64,6% ? Cela semble un pur non sens ... Ou cela sigifie-t-il que la dynamique atmosphérique porte en elle une indétermination physique qui interdit de prévoir « à 100% » ? Ou enfin qu'il n'y a aucune indétermination physique mais que nous, êtres pensants, n'avons pas assez d'informations et de moyens de calculs pour prédire parfaitement son évolution ? En fait, ces trois façons d'interpréter un résultat de probabilité sont valables, chacune dans un certain domaine.
Ainsi, en mécanique quantique, une particule peut se trouver « ici à 35,4% et là-bas à 64,6% » tant qu'on n'a pas mesuré concrètement sa position (et non pas « ici ou là-bas » !). Les physiciens admettent qu'avant une mesure, une particule unique peut être en plusieurs lieux simultanément...
En ce qui concerne les deux autres interprétations, indétermination physique objective ou manque d'informations du physicien, le débat est ouvert depuis 1958, date à laquelle James Maxwell introduit les probabilités en physique. Pour lui, la température d'un gaz est liée aux probabilités de mouvement des milliards de particules qui le composent ... Très choquant pour les physiciens de l'époque : comment un phénomène aussi réel et objectif que la température d'un gaz peut-il dépendre d'un état de connaissance, c'est-à-dire d'une donnée subjective ? Pourtant, cette théorie est l'une des grandes réussites de la physique moderne ...
Ainsi, si la théorie mathématique des probabilités est aujourd'hui bien comprise et acceptée, dès qu'on cherche à en comprendre le sens physique, l'étonnement reprend le dessus et motive des générations de futurs chercheurs.

C'est en XVIII^{e} siècle que les statistiques endossent quant à elles leur premier grand rôle dans la vie moderne : celui d'un outil de prévision. Le mathématicien Antoine Deparcieu établit dans un livre le « profil » de la mortalité de populations à partir de données statistiques. En se servant des méthodes d'échantillonnage, de calculs de moyennes et d'écart-type, il crée les premières « tables de mortalité » permettant d'évaluer le risque moyen de mort d'un individu en fonction de son profil. Ce risque est alors directement transformé en pécule, rente versée à quelqu'un durant toute sa vie en contrepartie de l'acquisition de son bien à sa mort. Avec Deparcieu, la statistique fait son entrée dans le monde de l'économie.
Mais ce n'est qu'au XIX^{e} siècle que la statistique finit de prendre la place qu'est la sienne aujourd'hui : celle d'une science mathématique mais aussi humaine, omniprésente dans le débat publique. C'est Adolphe Quételet, astronome belge, qui intègre dans un ouvrage toutes les lois de probabilités développées depuis Pascal et Fermat : mesure des erreurs, loi binomiale que vous allez découvrir ici, etc.
Il tente d'établir des lois statistiques des suicides et des crimes en fonction de paramètres comme l'origine sociale, l'âge, le sexe, le climat, le niveau d'études, le revenu, etc. Mais Quételet se voit reprocher de faire de l'homme un être dont le comportement est prédéterminé par des lois mathématiques...
De plus, avec les statistiques sociales, une question se pose : sont-ce les statistiques qui déterminent nos comportements ou l'inverse ? Par exemple, si le taux de meurtriers dans la population est de 5% par an, cela signifie-t-il qu'il existe une sorte de loi qui nous dépasse et qui « oblige » 5% de personnes à se transformer en meutriers ?
Ce type de questionnement hantera tout le XX^{e} siècle et conduira à de tragiques dérapages où l'on voudra « neutraliser » dès le berceau tout homme né avec les « paramètres statistiques du crime »...

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...
C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

I) Avec indépendance

I.1. Connaître les lois

Définition 1. (Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de Succès.
Soit X la variable aléatoire qui est égale à 1 en cas de succès et 0 sinon. Alors, on dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p. On note $X \hookrightarrow B(1;p)$. Dans ce cas, on a

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad V(X) = p(1-p)$$

Exemples :

- ⇝ Aimer ou non Mireille Matthieu
- ⇝ Etre ou ne pas être.
- ⇝ Lancer un dé et gagner si l'on obtient 5 : $X \hookrightarrow B\left(1;\frac{1}{6}\right)$ et $E(X) = \frac{1}{6}$, $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

Remarque : Interprétation des paramètres : Si l'on répète un grand nombre de fois une expérience de Bernoulli de paramètre p, de manière indépendante, la fréquence d'un succès sera proche de p, avec un écart-type (ou risque) de $\sqrt{p(1-p)}$.

Définition 2.

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités des issues de l'autre.

Remarque : Pour résoudre des problèmes étudiant une répétition de n expériences aléatoires indépendantes, on utilise très souvent un arbre.

Définition 3. (Schéma de Bernoulli et loi binomiale)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de paramètre p, s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres** n **et** p.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès (X est à valeurs dans $\{0;1;\dots;n\}$). Alors, on dit que X suit une **loi binomiale de paramètres** n **et** p. On note $X \hookrightarrow B(n;p)$.
Dans ce cas, pour tout $k \in \{0;1;\dots;n\}$ on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès parmi les n épreuves de Bernoulli, dans l'arbre représentant la situation. Ce nombre (entier) s'appelle un coefficient binomial et se lit « k parmi n »
De plus :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad V(X) = np(1-p)$$

Exemples :

Il est clair que : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

A la calculatrice

TI 82 à 84 :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	`10 Combinaison 4` `210`	Ecrire n Appuyer sur math Dans `PRB` choisir `3:Combinaison` Ecrire k

Calculer
$\rightsquigarrow$ $P(X=k)$
$\rightsquigarrow$ $P(X \leq k)$
où $X \hookrightarrow B(n,p)$
	`binomFdp(10,.3,4)`
	`.200120949`
	`binomFRép(10,.3,4)`
	`.8497316674`
		Appuyer sur 2nde + var pour obtenir distrib
		Puis choisir `0:binomFdp`
		ou `A:binomFRép`
		Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI 89 :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre

Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	`■ nbrComb(10,4) 210`
	`nbrComb(10,4)`
	`MAIN RAD AUTO FONC 1/30`
		Appuyer sur 2ND + 5 pour obtenir MATH
		Dans `7:Probabilité`
		Choisir `3:nbrComb(` ou `3:nCr(`
		Compléter dans l'ordre les paramètres n et k.

Calculer
$\rightsquigarrow$ $P(X=k)$
$\rightsquigarrow$ $P(X \leq k)$
où $X \hookrightarrow B(n,p)$
	`■ tistat.binomddp(10,.3,4)`
	`.200121`
	`■ tistat.binomfdr(10,.3,4)`
	`.849732`
	`TIStat.binomFdR(10,0.3,4)`
	`MAIN RAD AUTO FONC 3/30`
		Dans CATALOG ouvrir l'onglet F3 AppFlash
		Appuyer sur (pour aller à la lettre B.
		Puis choisir `binomDdP(....TIStat`
		ou `binomFdR(....TIStat`
		Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI Nspire :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	nCr(10,4) 210	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie `Probabilités`. Choisir `Nombre de combinaisons` Compléter dans l'ordre les paramètres n et k.
Calculer $\rightsquigarrow$ $P(X=k)$ $\rightsquigarrow$ $P(X \leq k)$ **où** $X \hookrightarrow B(n,p)$	binomPdf(10,0.3,4) 0.200121 binomCdf(10,0.3,0,4) 0.849732	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie `Probabilités`. Puis la sous-catégorie `Distributions` Puis choisir `Binomiale DdP` ou `Binomiale FdR` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

Casio 35+ : 10 `nCr` 2

nCr se trouve en appuyant sur OPTN + PROB

$\binom{4}{0} = \ldots \qquad \binom{4}{1} = \ldots \qquad \binom{4}{2} = \ldots \qquad \binom{4}{3} = \ldots \qquad \binom{4}{4} = \ldots$

Remarquons la symétrie dans les valeurs des coefficients ...

Remarques :

- Si on note q la probabilité d'échec alors $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$
- La probabilité d'avoir n succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)=p^n$
- La probabilité de n'avoir aucun succès est : $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=q^n$
  Par conséquent, on retrouve des résultats déjà connus, comme la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=1-q^n$$

Exemple :

On lance 5 dés. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. Remarquons que X est à valeurs dans $\{0;1;2;3;4;5\}$.
Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)$, puis $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

I.2. Se rappeler des coefficients

Propriété 1.

Symétrie : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0\leq k\leq n$ on a

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Triangle de Pascal : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0\leq k\leq n-1$ on a

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Exercice 1 : Dans lequel des cas suivants X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de la loi et calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)$ si c'est possible, puis l'espérance et la variance de X.

1. Dans une classe, on tire au sort sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonnés à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 10 dés, X est le nombre de 5 obtenus.
4. Un circuit comprend 2 lampes en série. Pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de 0.03. X est le nombres de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur.
   Même question avec cette fois des lampes en parallèles.

Exercice 2 : Un vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle, se décrivant lui-même « entre deux âges et très séduisant », décide de séquestrer des gens, juste pour le fun (« Lol ! » dixit le vieux prof d'histoire-géo à moitié aveugle).
Il en a kidnappé huit : ses quatre fils (Enzo, Basile, Hugo et Samuel) et quatre de ses collègues (Jéjé, Dédé et deux Lolos qu'il n'arrive pas à distinguer, bien que l'un soit un homme et l'autre une femme ...). Bref, il est bien atteint.
Le vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle considère que son expérience est un Succès lorsqu'il séquestre un(e) Lolo, un Echec sinon. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de Succès S.

1. Le vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle choisit au hasard, successivement et avec remise trois personnes parmi les huit.

a. Déterminer la loi de X.

b. Calculer $P(X=0)$, $P(X=2)$, $P(X \geq 2)$ et la probabilité d'obtenir au moins un Succès.

c. Calculer l'espérance de X et sa variance. Interpréter.

2. Désormais, le vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle choisit au hasard, successivement et sans remise, trois des personnes kidnappés.

a. La variable X suit-elle une loi binomiale ?

b. Construire l'arbre de probabilité décrivant la situation (les issues étant S et E).

c. Calculer la probabilité p de l'événement : « la personne séquestrée choisie en premier est l'un(e) des Lolos »

d. On sait désormais que le vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle a choisi l'un(e) des Lolos en premier. Calculer alors la probabilité q de l'événement : « la personne séquestrée choisie en deuxième est l'une des Lolos ».

e. Les probabilités p et q sont-elles égales ? Expliquer ce résultat.

f. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. Interpréter.

3. Le vieux professeur d'histoire-géo à moitié aveugle est désormais complètement aveugle et il a décidé de piquer ses otages au cure-dent, juste pour le fun (« Lol ! » dixit le vieux prof d'histoire-géo complètement aveugle).
L'expérience consiste à choisir au hasard l'un des huit otages, puis tenter de le piquer au cure-dent.
Le vieux professeur d'histoire-géo complètement aveugle répète 10 fois cette expérience, de manière indépendante. La probabilité que le vieux professeur d'histoire-géo complètement aveugle touche sa cible est de $\dfrac{1}{2}$ quand il s'agit d'une fille (donc de Lolo) ou de Samuel, et de $\dfrac{2}{3}$ sinon (la femme Lolo et Samuel étant plus menus que Dédé et plus petits que tous les autres, il est plus difficile de les atteindre).
Hugo a eu de mauvais résultats ce trimestre, ainsi cette fois, le vieux professeur d'histoire-géo complètement aveugle décide que son expérience est un Succès lorsqu'il le pique.
On appelle Y la variable aléatoire qui compte le nombre de Succès S.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer $P(Y=4)$

c. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$. Interpréter.

Exercice 3 : Dans le métro, il a 9% des voyageurs qui fraudent. Chaque jour à la station Alésia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale (malgré le fait qu'il n'y ait pas de remise, le nombre de personnes étant très important, on admet qu'il y a indépendance entre les personnes contrôlées).

1. Déterminer les paramètres de la loi de X.

2. Combien de personnes en moyenne vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?

3. Si le prix du ticket est de $1,70$€, quel doit être le prix de l'amende pour qu'en moyenne, l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent avec les fraudeurs de la station Alésian, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station ?

Exercice 4 : Un test comporte 10 questions. Chaque question contient 4 réponses possibles, dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. Quelle est la probabilité que le candidat ait bien répondu à la première question ?

2. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de bonnes réponses du candidat à ce test. Quelle loi suit X ?

3. Combien de bonnes réponses en moyenne obtient le candidat ?

4. A chaque bonnes réponses, l'examinateur ajoute 2 points ; à chaque mauvaise réponse, il ne retire pas de point.
Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre totale de points lors de ce test.

a. Exprimer Y en fonction de X.

b. En déduire $E(Y)$.

c. Le candidat a-t-il intérêt à répondre au hasard ?

5. L'examinateur change le barême. A chaque bonne réponse il ajoute 2 points, à chaque mauvaise, il retire 1 point.
Soit Z la variable aléatoire représentant le nombre total de points lors de ce test.

a. Exprimer Z en fonction de X.

b. En déduire $E(Z)$.

c. Le candidat a-t-il intérêt à répondre au hasard ?

Exercice 5 : On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On regarde sa couleur, puis on la remet dans le paquet. On recommence cette expérience 8 fois de suite.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où on a tiré un coeur.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.

2. A chaque fois qu'on tire un coeur, on gagne 3€. Dans les autres cas, on perd 1€.
Soit Y la variable aléatoire représentant le gain total lors des 8 tirages.

a. Exprimer Y en fonction de X.

b. En déduire l'espérance de Y.

c. Est-il finacièrement intéressant de jouer à ce jeu ?

I.3. Des stats aux probas : l'intervalle de fluctuation

Définition 4.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé à une variable aléatoire X suivant une loi $B(n;p)$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où a et b sont les deux entiers naturels définis par :

⇝ a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a)$ dépasse 0.025 strictement

⇝ b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b)$ dépasse 0.975

Ainsi, quand on répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p, la fréquence observée du succès se situe dans au moins 95% des cas dans l'intervalle ci-dessus.

Remarque : Il est clair que cet intervalle contient bien au moins 95% des fréquences, puisqu'il consiste à rejeter les 5% les plus « obsolètes », à savoir 2.5% à chaque extrême des valeurs possibles prises par X.
Pour calculer a et b, on utilisera souvent un tableur, ou alors les résultats seront donnés dans l'énoncé.

Critère de décision

On veut examiner l'hypothèse $\mathrm{P}(\text{Succès}) = p$. Soit f la fréquence d'apparition observée de l'événement Succès dans un échantillon d'expériences répétées de taille n.
On désigne par I l'intervalle de fluctuation des fréquences à 95% associée à la loi binomiale $\mathrm{B}(n; p)$.

- $\rightsquigarrow$ Si $f \notin \mathrm{I}$, on rejette l'hypothèse avec un risque de se tromper inférieur à 5%
- $\rightsquigarrow$ Si $f \in \mathrm{I}$, on ne rejette pas l'hypothèse car elle est raisonnable (on ne connait pas le risque de se tromper).

Exemple :

Prenons l'exemple du lancé d'une capsule lancée 100 fois. Considérons que le succès est que la capsule retombe côté bombé face visible et faisons l'hypothèse de $p = \frac{1}{4}$.
On peut vérifier que $a = 17$ et $b = 34$. Donc l'intervalle de fluctuation associé est

$$\mathrm{J} = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{17}{100}; \frac{34}{100}\right] = [0.17; 0.34]$$

Ce qui signifie que si on a bien $p = \frac{1}{4}$, alors pour au moins 95% des expériences à 100 lancers, on obtient entre 17 et 34 fois le côté bombé de la capsule.

Ponpon a obtenu 32 fois le côté bombé sur 100 lancés, donc son hypothèse $p = 0.25$ est raisonnable avec un risque d'erreur de 5% (elle ne fait pas parti des 5% considérés obsolètes).

Et pour l'hypothèse $p = 0.5$?

Exercice 6 :

1. Que fait cet algorithme ? Expliquer.
2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice.
3. Déterminer, pour un seuil de 0.95, les intervalles de fluctuation d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0.3$. Interpréter.
4. Au seuil de 90% ? Interpréter.
5. Reprendre les deux questions précédentes pour $n = 300$ et $p = 0.02$.

Algorithme 1 : *Fluctu*

Entrée(s) :
$n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq p \leq 1$ et $s \in [0;1]$
Variables
r est un nombre réel ; k est un entier naturel

Début
$k := 0$ et $r := (1-p)^n$
Tant que ($r \leq \frac{1-s}{2}$) **Faire**
$k := k+1$
$r := r +$ Combinaison$(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
Fin Tant que
Afficher « $a =$ », k
Tant que ($r < \frac{1+s}{2}$) **Faire**
$k := k+1$
$r := r +$ Combinaison$(n,k) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
Fin Tant que
Afficher « $b =$ », k
Fin

```
PROGRAM:INTERVFL
:Prompt N,P,S
:0→K
:(1-P)^N→R
:While R≤(1-S)/2

:K+1→K
:R+binomFdp(N,P,
K)→R
:End
:Disp "A=",K
:While R<(1+S)/2

:K+1→K
:R+binomFdp(N,P,
K)→R
:End
:Disp "B=",K
```

```
F1▾    F2▾         F3▾ F4▾ F5      F6▾
Outils StructCtrl E/S Var Rech... Mode
:interflu(n,p,s)
:Prgm
:Local k,r
:0→k
:(1-p)^n→r
:While r≤(1-s)/2
:k+1→k
:r+tistat.binomddp(n,p,k)→
 r
:EndWhile
:Disp "a=",k
:While r<(1+s)/2
:k+1→k
:r+tistat.binomddp(n,p,k)→
 r
:EndWhile
:Disp "b=",k
:EndPrgm
```

Define LibPub **intervflucbin**(n,p,s)=
Prgm
Local r,k
$k:=0$
$r:=(1-p)^n$
While $r \leq \frac{1-s}{2}$
  $k:=k+1$
  $r:=r+$binomPdf(n,p,k)
EndWhile
Disp "a=",k
While $r \leq \frac{1+s}{2}$
  $k:=k+1$
  $r:=r+$binomPdf(n,p,k)
EndWhile
Disp "b=",k
EndPrgm

Exercice 7 : Une machine fabrique des processeurs. On sait que la probabilité d'obtenir un porcesseur défectueux est $p = 0.06$.
On contrôle des lots de 300 processeurs. Soit X une variable aléatoire représentant le nombre de processeurs défectueux sur ce lot. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres 300 et 0.06.

1. Déterminer la valeur du plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 0.025$.
2. Déterminer la valeur du plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0.975$.
3. En déduire l'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation, sur un échantillon aléatoire de taille 300, de la variable X.

4. Le contrôle de la machine A donne 23 processeurs défectueux ; le contrôle de la machine B donne 28 processeurs défectueux.
Que peut-on en conclure ?

II) Sous certaine(s) condition(s)

II.1. Probabilité conditionnelle

Travail de l'élève 1 : Une enquête est effectuée auprès des 100 éléves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des éléves. On a obtenu le tableau suivant

sexe \ travail	< 5 minutes	≥ 5 minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons.
On suppose les éléves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat.

1. Calculer la probabilité que l'éléve prélevé travaille plus de 5 minutes.
2. Calculer la probabilité pour que ce soit un garçon.
3. Calculer la probabilité pour que l'éléve prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes.
4. Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard.
L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
Calculer la probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes.
*On dit que c'est **la probabilité conditionnelle de T sachant G** qu'on note* $P_G(T)$
5. Conjecturer une formule liant $P(G)$, $P(T\cap G)$ et $P_G(T)$.
6. Traduire en français $P_G(T)$, puis utiliser votre conjecture pour calculer cette probabilité.
Cela est-il cohérent avec le tableau (ie sans utiliser la conjecture) ?

Définition 5. (Proposition (Admise))

Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité P, avec $P(A)\neq 0$.
La probabilité de *B* sachant *A* est définie par :

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Preuve

Montrons que P_A est bien une probabilité sur Ω.

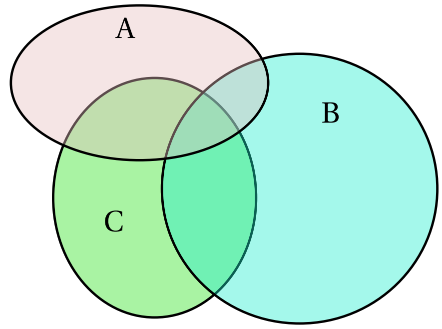
⇝ P_A est à valeurs dans $[0;1]$?
Il est clair que $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\geq 0$ comme quotient de nombres positifs ou nuls.
De plus, on a aussi $A\cap B\subset A$ donc $P(A\cap B)\leq P(A)$ et donc $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\leq 1$.
Donc P_A est une application de Ω dans $[0;1]$.

⇝ $P_A(\Omega)=1$? $\qquad P_A(\Omega)=\dfrac{P(A\cap\Omega)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$

Preuve (Suite)

⇝ Si B et C sont deux parties disjointes de Ω, alors $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)$?
Soient B et C deux parties disjointes de Ω, alors $B \cap C = \varnothing$ et :

$$\begin{aligned}
P_A(B\cup C) &= \frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(A)} && \text{par définition de } P_A \\
&= \frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(A)} && \text{par distributivité} \\
&= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} + \frac{P(A\cap C)}{P(A)} && \text{car } A\cap B \text{ et } A\cap C \text{ sont disjoints (puisque } B \text{ et } C \text{ le sont) et } P \text{ est une loi de probabilité sur } \Omega \\
&= P_A(B) + P_A(C)
\end{aligned}$$



Donc P_A est bien une loi de probabilité sur Ω

Propriété 2.

Si A est un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque de l'univers Ω on a :

- ⇝ $P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- ⇝ $P_A(A) = 1$
- ⇝ Si A et B sont incompatibles $P_A(B) = 0$
- ⇝ $P_A\left(\overline{B}\right) = 1 - P_A(B)$

Preuve

Il suffit d'appliquer la définition et/ou le fait que P_B est une loi de probabilité sur Ω.

Remarques :

⇝ Ceci est cohérent avec ce que l'on sait des arbres de probabilités.
En effet, P_A étant une loi de probabilité pour n'importe quel événement A de probabilité non nulle, on a bien que la somme des probabilités des branches partant de n'importe quel nœud A est égale à 1.
De plus, la probabilité $P_A(B)$ se lit directement sur la branche issue de A qui arrive en B. Alors que la probabilité $P(A\cap B)$ se calcule en multipliant les probabilités des branches du chemin AB, ie :

$$P(A\cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

⇝ Ceci nous permettra de « retourner un arbre ». En effet, à partir d'un arbre, on peut calculer $P(A\cap B)$ et $P(B)$.
Si ce nombre est différent de 0, on peut alors dire $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Exemple :

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale des Jeux Olympiques. Il a deux figures à réaliser.
On note A l'événement « Prschtr réussit sa première figure » et B l'événement « Prschtr réussit sa deuxième figure ».
Il sait, à force d'entraînement, que la probabilité qu'il réussissent la première est de 0,90.
Par contre, le moral de Prschtr n'est pas à toute épreuve, et la probabilité qu'il réussisse sa deuxième figure est de 0.8 s'il a réussi la première, sinon seulement de 0.5 .

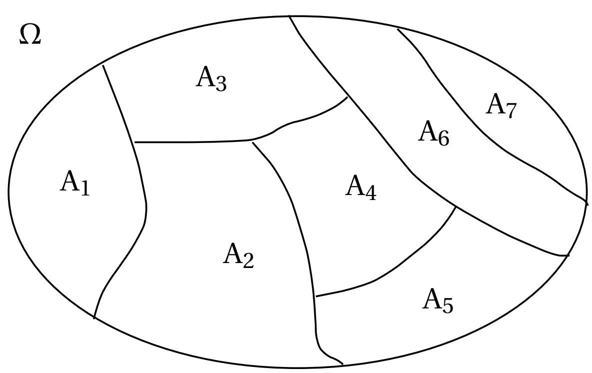
1. Traduire les probabilités de l'énoncé sous forme mathématique.
2. Construire l'arbre de probabilité décrivant l'expérience.
3. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses deux figures ?
4. Quelle est la probabilité qu'il réussisse la deuxième ?
5. Prschtr a réussi sa deuxième figure, quelle ait la probabilité qu'il ait raté la première ?

II.2. Formule des probabilités totales

Définition 6.

Des événements non vides $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forment une **partition** de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et que leur réunion forme Ω.

Remarque : Cela revient à découper Ω en événements incompatibles A_1, A_2, ... , A_k,



Exemples :

Dire si les séparations suivantes sont des partitions de la classe :

- ⇝ Séparer la classe en groupes suivant le sexe.
- ⇝ Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au chasseur syldave.
- ⇝ Séparer la classe en groupes suivant la couleur des yeux.
- ⇝ Séparer une classe en un groupe de porteurs de sandales avec chaussettes et un groupe d'imitateurs du Schblurb syldave.

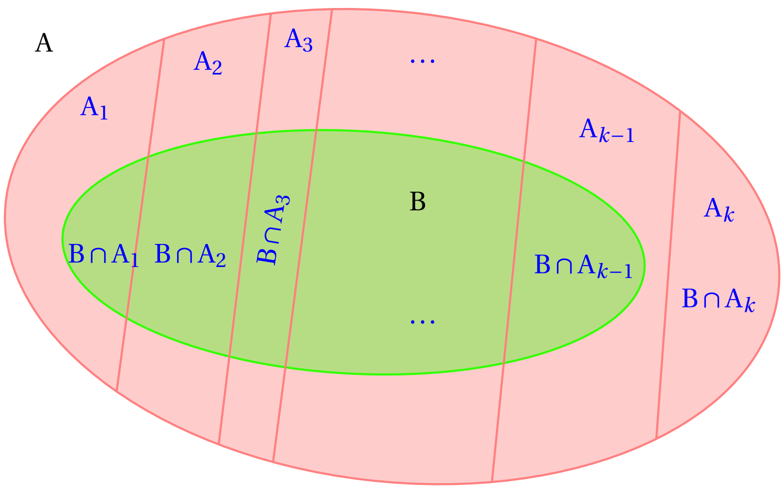
Théorème 1.

Soit A_1, A_2, ... , A_k, une partition de Ω et B un événement quelconque de Ω. On a :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k)$$

Donc :

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \cdots + P_{A_k}(B) \times P(A_k)$$



Preuve

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \\ &= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_k) \quad \text{par distributivé} \end{aligned}$$

Cette union étant disjointe, on a donc :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_k)$$

Exemple :

On considère les urnes U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement :

- 1 boule rouge et 5 jaunes
- 3 rouges et 1 jaune
- 1 rouge et 2 jaunes

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit jaune ?

Remarque : Ceci justifie la dernière règle de calcul sur les arbres :
« La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins réalisant à cet événement. » puisque l'on décompose en fait l'événement qui nous intéresse suivant une partition de Ω.

Exercice 8 : Taupie a mis des oeufs de pâques dans une boîte, les uns contiennent un cadeau, les autres non. On sait que :

- 30% des oeufs contiennent un cadeau.
- 40% des oeufs avec un cadeau sont bleus, les autres sont roses ;
- 75% des oeufs sans cadeau sont bleus, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasad un oeuf dans la boîte. On admet que tous les oeufs ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- C : « l'oeuf choisi contient un cadeau »
- B : « l'oeuf choisi est bleu »

1. Traduire les probabilités de l'énoncé sous forme mathématique.
2. Représenter la situation par un arbre de probabilités.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$ par une phrase, puis calculer sa probabilité.
5. Calculer la probabilité qu'un oeuf bleu contienne un cadeau.

Exercice 9 : Simplet, Goldorak et Monica Bellucci reviennent de la forêt avec trois paniers contenant respectivement 1, 2 et 3 champignons. Dans chaque panier, il y a un champignon vénéneux.
On choisit un des trois paniers au hasard, et dans ce panier on goûte un des champignons choisi lui aussi au hasard.
Quelle est la probabilité de se tordre de douleur puis de succomber dans d'atroces souffrances quelques minutes après ?
Un élève syldave qui passait par là a choisi un panier au hasard puis un champignon dans ce panier. On constate qu'il se tord de douleur puis succombe dans d'atroces souffrances : quelle est la probabilité qu'il ait goûté un champignon venant du panier de Monica Bellucci ?

Exercice 10 : Pour réussir une carrière politique en Corrèze, il faut une implantation locale. Dans cette perspective, un jeune énarque décide d'acquérir un château corrézien. Pour se faire connaître, il hante les commices agricoles du département. Il a ainsi deux chances sur trois d'être élu député. Si, par dessus le marché, il touche le derrière des vaches, cette probabilité passe à trois chances sur quatre. Il y a trois chances sur cinq pour que, son conseiller en communication lui ayant refilé le tuyau, il touche le derrière des vaches.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit élu député.
2. Il est député. Calculez la probabilité pour qu'il ait touché le derrière des vaches.

Exercice 11 : Marcel est distrait. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le tramway entièrement dévétu. Quand il a voyagé la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le jour même ; sinon, une fois sur deux.
On note N_n l'événement « il voyage le $n^{\text{ième}}$ jour nu » et p_n sa probabilité.

1. Exprimez p_{n+1} en fonction de p_n.
2. On pose $u_n = p_n - 5/13$
3. Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n, puis de u_1 et n.
4. Exprimez alors p_n en fonction de n.
5. Montrez que la suite (p_n) est convergente et calculez sa limite.

Exercice 12 : Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitière et deux chances sur sept pour qu'elle soit gauchère. Si elle est droitière, il y a trois chances sur cinq pour qu'elle épluche des carottes et deux chances sur cinq pour qu'elle dénoyaute des olives. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux pour qu'elle épluche des carottes et une chance sur deux pour qu'elle dénoyaute des olives.

1. Calculez la probabilité pour qu'elle dénoyaute des olives.
2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénoyaute des olives.
   Calculez la probabilité pour qu'elle soit gauchère.

Exercice 13 : Rastatopoulos, célèbre poète grec du XX^e siècle avant GC, nous rapporte l'anecdote suivante.
La Vénus de Milo rangeait ses olives dans trois amphores. Dans la première, il y avait 30 olives vertes et 20 olives noires. Les deux autres amphores contenaient, l'une quatre olives vertes (Rastatopoulos ne sait plus laquelle), l'autre quatre olives noires (Rastatopoulos ignore évidemment de quelle amphore il s'agit).
Un jour d'éclipse totale du soleil, la Vénus de Milo prend, au hasard, une olive de la première amphore, puis la place dans une des deux autres amphores. Elle prend ensuite dans celle-ci une olive au hasard et le soleil réapparait : l'olive est verte.
Calculez la probabilité pour que la dernière amphore visitée contienne plusieurs olives vertes.
On pourra considérer les événements suivants

- V_1 : *« la première olive est verte »*
- A : *« la deuxième amphore contenait les quatre olives vertes »*
- V_2 : *« la deuxième olive est verte »*

II.3. L'indépendance

Définition 7.

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarques :

- Cela revient à dire, si A et B sont de probabilité non nulle, que $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.
- Ainsi, la réalisation de l'un des événements n'a pas d'influence sur celle de l'autre, ce qui est cohérent avec la définition de l'indépendance donnée dans la partie I.
- Ne pas confondre **incompatibles** ($P(A \cap B) = 0$) et **indépendants** ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$) !

Exemples :

- Ω est indépendant de tout événement A, car $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A) \times P(\Omega)$.
- Montrer que deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.
- *On peut faire dire ce que l'on veut à des probabilités selon le modèle choisi*.
  Supposons que sur un groupe de 100 personnes, 20 portent des sous-vêtements en polystirène expansé, 50 se curent la narine droite avec l'index gauche et 10 font les deux à la fois.
  On met ces 100 personnes dans une boîte et on en tire une au hasard.
  1. Vérifiez que les événements « la personne tirée porte des sous-vêtements en polystirène expansé » et « la personne tirée se cure la narine droite avec l'index gauche » sont indépendants.
  2. Étudiez le même problème en considérant cette fois-ci que 15 personnes se curent la narine droite avec l'index gauche (pourquoi pas).

Remarque : De façon générale, la définition probabiliste de l'indépendance est plus large que la notion intuitive. La seule idée à retenir est que , si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de *A* ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de *B***.

Théorème 2.

Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B

Preuve

$B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ Donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap B\right) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \quad \text{car A et B sont indépendants} \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(B) \times P\left(\overline{A}\right) \quad \text{Donc } \overline{A} \text{ et B sont indépendants.} \end{aligned}$$

III) Concrètement, le bac, c'est quoi ? ?

Exercice 14 : On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 » D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Exercice 15 : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.*

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.

Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est

a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

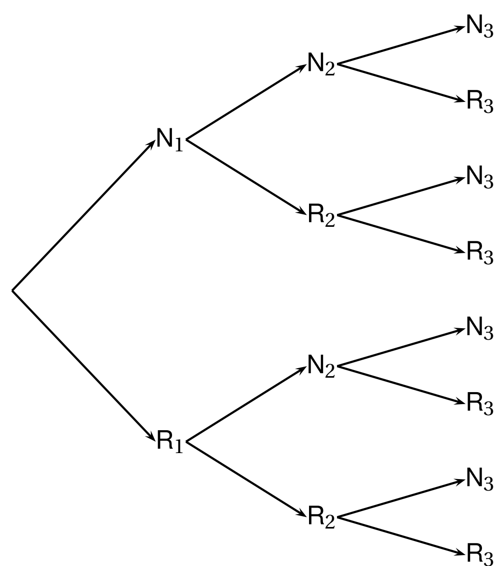
a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 3 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

a. $1-(0,25)^3$ **b.** $3\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^3$

<u>Exercice 16</u> : On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité des évènements $N_1\cap N_2\cap N_3$, et $N_1\cap R_2\cap N_3$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1\cap N_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1\cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

<u>Exercice 17</u> : *On note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé.*
Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note A_0 l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;
On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;
On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.

2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n^o 2 »
On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n^o 2 »
On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n^o 2 »

- **a.** Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
- **b.** En déduire $p(B_0)$.
- **c.** Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
- **d.** On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?

3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 18 :

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1,deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1 » ;
B : « Le dé amène un multiple de trois » ;
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le lui un multiple de trois » ;
N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

- **a.** Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.
- **b.** Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.
- **c.** Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.
- **d.** Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 19 :

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton, puis on remet le jeton tiré dans l'urne.
   On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
   On note $\mathrm{P}(a,b) = a(1+b) - 5 + b(1-a)$
   Montez que la probabilité que $\mathrm{P}(a,b)$ soit nul est égale à 1/4.
2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.
   Si A obtient un $\mathrm{P}(a,b)$ nul et B un $\mathrm{P}(a,b)$ non nul, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Si A obtient un $\mathrm{P}(a,b)$ non nul et B un $\mathrm{P}(a,b)$ nul, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
   Pour tout entier n, on désigne par :
   - A_n l'événement : « A gagne la $n^{\text{ème}}$ partie »
   - B_n l'événement : « B gagne la $n^{\text{ème}}$ partie »
   - C_n l'événement : « le jeu continue après la $n^{\text{ème}}$ partie »

   a. Calculez les probabilités $p(\mathrm{A}_1)$, $p(\mathrm{B}_1)$ et $p(\mathrm{C}_1)$.

   b. Exprimez $p(\mathrm{C}_{n+1})$ en fonction de $p(\mathrm{C}_n)$ et montrez que
   $$p(\mathrm{C}_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n$$

   c. Exprimez $p(\mathrm{A}_{n+1})$ en fonction de $p(\mathrm{C}_n)$ et montrez que
   $$p(\mathrm{A}_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$
3. **a.** Déterminez la limite de $p(\mathrm{A}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   b. Déterminez le plus petit entier n tel que $p(\mathrm{A}_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Exercice 20 : Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « Amélie est arrêtée par le n^{eme} feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}_n}$ l'événement contraire (le feu orange est considéré comme un feu rouge).

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut 1/8.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées

- la probabilité que le $(n+1)^{eme}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{eme} feu est rouge ou orange, vaut 1/20.
- la probabilité que le $(n+1)^{eme}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{eme} feu est vert, vaut 9/20.

1. On s'intéresse tout d'abord aux deux premiers feux tricolores. Complétez un arbre pondéré rendant compte de la situation.
2. On se place maintenant dans le cas général.

   a. Donnez les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1})$.

   b. En remarquant que $\mathrm{E}_{n+1} = (\mathrm{E}_{n+1} \cap \mathrm{E}_n) \cup (\mathrm{E}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{E}_n})$, montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$$

   c. Déduisez-en l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 28p_n - 9$.
   a. Montrez que (u_n) est géométrique et déterminez sa raison.
   b. Exprimez u_n puis p_n en fonction de n.
   c. Déterminez la limite, si elle existe, de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez ce résultat.

Exercice 21 : On considère l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Avec deux chiffres distincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $[x, y]$ ou $[y, x]$.
Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $[z, z]$.

1. Combien de dominos peut-on ainsi créer ?
2. On tire au hasard un domino.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
   Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à 4/45 ».
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 22 : On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix sont équiprobables), puis à effectuer lle tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'événement « l'urne a est choisie », B l'événement « l'urne b est choisie » et R l'événement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_A(R)$ la probabilité conditionnelle de l'événement R par rapport à l'événement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   a. Déterminez les probabilités $p(A)$, $p_A(R)$, $p(A \cap R)$.
   b. Montrez que $p(R) = 13/30$.
   c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?
2. Dans cette question , l'urne a contient quatre boules blanches, l'urne b contient deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges et l'urne b en contient $(5 - n)$, où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5.
   a. Exprimez $p_A(R)$ et $p_B(R)$ en fonction de n.
   b. Montrez que $p(R) = \dfrac{-n^2 + 4n + 10}{(4 + n)(7 - n)}$
   c. On sait que n ne prend que six valeurs entières.
   Déterminez la répartition des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur de $p(R)$.